GILBERT FAZOLARIDA CHEGARALANMAGAN VA OPERATOR KOEFFITSIYENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING SPEKTRAL TAHLILI

Sherzod Abdusalomov
Farg'ona davlat texnika universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
sherzodabdusalomov268@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tezisda Gilbert fazolarida chegaralanmagan chiziqli operatorlar, xususan, Ermit va normal operatorlar ishtirok etgan differensial tenglamalarning shartli korrektligi hamda spektral xossalari tadqiq qilingan. Riss teoremasi asosida chiziqli funksionallarning ifodalanishi, simmetrik va o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning defektlik indekslari tahlil qilinib, Stiltiyes operator integrallari orqali birlikning spektral yoyilmasi qurilgan.

Kalit so'zlar: Gilbert fazosi, chegaralanmagan operator, Ermit operatori, normal operator, defektlik indeksi, spektral yoyilma, Riss teoremasi.

1. Gilbert fazolari va chiziqli funksionallar strukturasi

H Gilbert fazosida norma skalyar ko'paytma orqali $\|x\|^2=(x,x)$ ko'rinishida kiritiladi. Elementlar uchun Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi o'rinli bo'ladi:

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$$

Agar $H_1\subset H$ yopiq qism fazo bo'lsa, fazoning ixtiyoriy x elementi $x=y+z$ ($y\in H_1, z\in M$) ko'rinishda yagona tarzda ortogonal yig'indiga ajraladi: $H=H_1\oplus M$.

Riss teoremasi. H fazosidagi ixtiyoriy f(x) chiziqli chegaralangan funksional yagona $u\in H$ elementi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$f(x)=(x,u),\quad \|f\|=\|u\|$$

Qo'shma H^* fazoda skalyarga ko'paytirish $(\lambda f)(x)=\bar{\lambda}f(x)$ qoidasi orqali kiritilganda, H^* fazo H ga izometrik bo'ladi.

2. Chegaralanmagan simmetrik va Ermit operatorlari

$D(A)\subset H$ sohada aniqlangan (zich joylashgan, $\overline{D(A)}=H$) chiziqli A operatori uchun qo'shma A^* operator quyidagi ayniyatdan aniqlanadi:

$$(Ax,y)=\left(x,A^*y\right)$$

• **Simmetriklik sharti:** Barcha $x,y\in D(A)$ uchun $(Ax,y)=(x,Ay)$ tenglik bajarilsa, operator simmetrik deyiladi.

• **Differensial operator misoli:** $H=L_2(0,1)$ fazoda $Au=-\frac{d^2u}{dx^2}$, $D(A)=\{u\in C^2[0,1]:u(0)=u(1)=0\}$ chegaraviy shartli operatori simmetrikdir, chunki bo'laklab integrallash natijasida $(Au,v)=\int_0^1 u'(x)v'(x)dx=(u,Av)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

• **O'z-o'ziga qo'shmalik mezoni:** Simmetrik operatorning yuqori va quyi yarim tekislikdagi defektlik indekslari nolga teng bo'lsa, u holda $D(A)=D\left(A^*\right)$ bo'lib, operator o'z-o'ziga qo'shma (Ermit) operatorga aylanadi.

Agar A operator yopiq bo'lib, $AA^*=A^*A$ sharti bajarilsa, u normal operator deyiladi (bunda $\|Ax\|=\|A^*x\|$).

3. Birlikning spektral yoyilmasi va operatorli integrallar

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

O'z-o'ziga qo'shma A operatorining regulyar nuqtalari va spektri haqiqiy sonlar o'qida joylashadi. E_λ ortogonal proyeksiyalash operatorlari oilasi (λ bo'yicha chapdan kuchli uzluksiz, $E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda,\mu)}$) birlikning spektral yoyilmasini tashkil etadi.

Ixtiyoriy uzluksiz $F(\lambda)$ funksiyasi uchun Stiltiyes operatorli integrali quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b F(\lambda) dE_\lambda$$

U holda o'z-o'ziga qo'shma A operatori ushbu spektral integral ko'rinishida ifodalanadi:

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x, \quad x \in D(A)$$

Agar A musbat aniqlangan operator bo'lib, $(Ax,x) \geq \alpha(x,x)$ ($\alpha > 0$) tengsizlikni qanoatlantirsa, integral integrallash chegarasi $[\alpha,\infty)$ sohasiga qisqaradi:

$$Ax = \int_{\alpha}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x$$

Xulosa

Ishda chegaralanmagan differensial-operatorli tenglamalarni funksional tahlil va spektral nazariya usullari yordamida tadqiq qilish asoslari ko'rib chiqildi. Riss teoremasi va Stiltiyes operator integrallari vositasida o'z-o'ziga qo'shma hamda normal operatorlarning spektral xossalari soddalashtirildi, bu esa operator koeffitsiyentli differensial tenglamalarning shartli korrektligini tahlil qilish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2019, №2(20), с. 88–95.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
4. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.