NOCHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISHNING SAMARALI USULLARI

Achilova Shoira Oltiboyevna
Toshkent shahar,Shayhontohur tumani
Respublika ixtisoslashtirilgan rassomlik maktabi (RIRM)
Birinchi toifali matematika va informatika fani o'qituvchisi
DOI:https://doi.org/10.5281/zenodo.22863854

Annotatsiya. Mazkur tezisda nochiziqli differensial tenglamalarni sonli yechishda qo'llaniladigan asosiy yondashuvlar, xususan Eyler, Runge–Kutta, adaptiv qadamli hamda implicit usullarning hisoblash xususiyatlari tahlil qilinadi. Usul tanlashda aniqlik, barqarorlik, hisoblash xarajati va tenglamaning qattiqlik darajasi asosiy mezonlar sifatida qaraladi. Nochiziqli masalalarda yagona universal algoritm mavjud emasligi, samarali yechim masala xususiyatiga mos sonli sxemani tanlash, qadam uzunligini boshqarish va xatolikni nazorat qilish bilan bog'liqligi asoslanadi. Taqqoslovchi jadval asosida usullarning afzalliklari, cheklovlari va tavsiya etiladigan qo'llanish holatlari umumlashtiriladi.

Kalit so'zlar: nochiziqli differensial tenglama, sonli usul, Eyler usuli, Runge–Kutta usuli, adaptiv qadam, implicit sxema, qattiq tenglama, xatolik, barqarorlik.

Аннотация. В тезисе рассматриваются основные численные подходы к решению нелинейных дифференциальных уравнений, включая методы Эйлера, Рунге–Кутты, адаптивные схемы и неявные методы. В качестве ключевых критериев выбора алгоритма анализируются точность, устойчивость, вычислительная стоимость и жесткость задачи. Показано, что эффективность численного решения определяется не универсальностью отдельного метода, а соответствием схемы структуре уравнения, управлением шагом интегрирования и контролем погрешности. В сравнительной таблице обобщены преимущества, ограничения и рекомендуемые области применения рассматриваемых методов.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, численный метод, метод Эйлера, метод Рунге–Кутты, адаптивный шаг, неявная схема, жесткое уравнение, погрешность, устойчивость.

Abstract. This thesis examines major numerical approaches for nonlinear differential equations, including Euler-type schemes, Runge–Kutta methods, adaptive step-size algorithms, and implicit techniques. Accuracy, stability, computational cost, and stiffness are considered the principal criteria for method selection. The analysis shows that no single numerical algorithm is universally optimal for nonlinear problems; reliable computation depends on matching the scheme to the equation structure, controlling the integration step, and monitoring numerical error. A comparative table summarizes the main advantages, limitations, and recommended application domains of the selected methods.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Keywords: nonlinear differential equation, numerical method, Euler method, Runge–Kutta method, adaptive step size, implicit scheme, stiff equation, error, stability.

KIRISH

Nochiziqli differensial tenglamalar mexanika, issiqlik va massa almashinuvi, biologik tizimlar, iqtisodiy dinamika, boshqaruv nazariyasi va muhandislik modellarida keng uchraydi. Bunday masalalarning katta qismida aniq analitik yechimni topish qiyin yoki umuman imkonsiz bo‘lib, amaliy natija olish uchun sonli hisoblash usullariga murojaat qilinadi. Sonli usullar differensial masalani diskret algoritmga aylantirib, berilgan boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlarda yechimning taqribiy qiymatlarini hisoblash imkonini beradi [1; 3].

Nochiziqlilik natijasida yechimning keskin o‘zgarishi, lokal sezgirlik, barqarorlikning buzilishi va qattiqlik kabi holatlar yuzaga kelishi mumkin. Shu sababli algoritmni faqat aniqlik tartibiga ko‘ra tanlash yetarli emas; qadam uzunligi, hisoblash xarajati, barqarorlik sohasi va iteratsion jarayonning yaqinlashuvi ham hisobga olinishi lozim [4; 7]. Tezisning maqsadi nochiziqli differensial tenglamalarni sonli yechishning amaliy jihatdan samarali usullarini tizimlashtirish va ularni tanlash mezonlarini qisqa ilmiy tahlil asosida yoritishdan iborat.

ASOSIY QISM

Birinchi tartibli boshlang‘ich masala umumiy holda $y'=f(x,y)$, $y(x0)=y0$ ko‘rinishda yoziladi. Eng sodda usullardan biri Eyler sxemasi bo‘lib, u $y(n+1)=y(n)+h\cdot f(x(n),y(n))$ formula asosida keyingi tugundagi qiymatni hisoblaydi. Usulning afzalligi algoritmik soddalik va kam hisoblash xarajatidir, biroq birinchi tartibli aniqlik tufayli qadam kattalashganda xatolik tez ortadi. Shu bois Eyler usuli ko‘proq boshlang‘ich baholash, o‘quv tajribalari yoki juda kichik qadamli hisoblashlarda maqsadga muvofiqdir [2; 6].

Runge–Kutta oilasidagi usullar, ayniqsa to‘rtinchi tartibli klassik RK4 sxemasi, aniqlik va algoritmik qulaylik o‘rtasidagi muvozanat sababli keng qo‘llanadi. RK4 bir qadamda funksiyaning bir nechta oraliq qiymatlarini hisoblab, lokal xatolikni sezilarli kamaytiradi. Silliq va qattiq bo‘lmagan nochiziqli tenglamalarda ushbu usul odatda yuqori aniqlik beradi [1; 8]. Biroq qattiq tenglamalarda eksplisit Runge–Kutta sxemasi barqarorlik sababli juda kichik qadam tanlashni talab qilishi mumkin. Natijada hisoblash vaqti ko‘payadi va yuqori tartibning amaliy afzalligi pasayadi [9].

Adaptiv qadamli Runge–Kutta usullarida qadam uzunligi yechimning lokal xatti-harakatiga qarab avtomatik o‘zgartiriladi. Xatolik kichik bo‘lgan oraliqlarda qadam kattalashtiriladi, yechim keskin o‘zgargan sohalarda esa kichraytiriladi. Bunday yondashuv berilgan aniqlikni saqlagan holda ortiqcha hisoblashlarning oldini oladi. Ayniqsa uzoq integrallash oralig‘i yoki turli dinamik rejimlar ketma-ket kuzatiladigan nochiziqli modellarda adaptiv boshqaruv samarali hisoblanadi [3; 8].

Qattiq differensial tenglamalarda implicit Eyler, trapezoidal sxema va orqaga differensiallash formulalari kabi implicit usullar muhim o‘rin tutadi. Ularning har bir qadamida algebraik, ko‘pincha nochiziqli tenglama yechish zarur bo‘ladi. Bu holat bir qadam narxini oshiradi, lekin barqarorlik nuqtai nazaridan yirikroq qadamlar bilan ishlash imkonini beradi [9; 10]. Nochiziqli algebraik tenglamani yechish uchun Nyuton usuli yoki uning modifikatsiyalaridan foydalanish mumkin; bunda boshlang‘ich yaqinlashuv va Yakobian matritsasini hisoblash sifati yaqinlashuv tezligiga bevosita ta’sir etadi [5; 6].

1-jadval. Nochiziqli differensial tenglamalarni sonli yechish usullarining qiyosiy tavsifi

Usul	Aniqlik / barqarorlik	Afzalligi	Cheklovi	Tavsiya etiladigan holat

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Eyler	1-tartib, eksplisit	Juda sodda va tez	Xatolik nisbatan katta	Dastlabki baholash va kichik qadam
RK4	4-tartib, eksplisit	Yuqori aniqlik va qulay algoritm	Har qadamda bir necha funksiya hisoblanadi	Silliq, qattiq bo'lmagan masalalar
Adaptiv RK	O'zgaruvchan qadam	Aniqlikni avtomatik nazorat qiladi	Algoritm murakkabroq	Dinamikasi notekis masalalar
Implicit Eyler	1-tartib, yuqori barqarorlik	Qattiq masalalarda ishonchli	Har qadamda algebraik tenglama	Qattiq nochiziqli tizimlar
BDF / implicit ko'p qadamli	Yuqori barqarorlik	Uzoq vaqtli stiff hisoblashda samarali	Boshlash va iteratsiya talab etadi	Katta qattiqlikka ega tizimlar

Jadvaldan ko'rinadiki, samaradorlik tushunchasi faqat yuqori aniqlik bilan chegaralanmaydi. Masalan, RK4 qattiq bo'lmagan masalada katta aniqlik beradi, ammo kuchli qattiqlik mavjud bo'lsa, implicit sxema kichikroq tartibga ega bo'lishiga qaramay umumiy hisoblash vaqtini kamaytirishi mumkin. Demak, usulni tanlashda tenglamaning spektral xususiyatlari, yechimning silliqligi, talab etilgan aniqlik va hisoblash resurslari birgalikda baholanishi zarur [4; 9].

Sonli hisoblashning ishonchliligini oshirish uchun uchta amaliy tamoyil muhim: birinchidan, qadamni kamaytirib yechimning konvergentsiyasini tekshirish; ikkinchidan, imkon qadar analitik yoki yuqori aniqlikdagi etalon yechim bilan solishtirish; uchinchidan, absolut va nisbiy xatolik mezonlarini alohida nazorat qilish. Nochiziqli masalalarda kichik lokal xatolik har doim global xatolikning kichik bo'lishini kafolatlamasligi mumkin, chunki dinamik tizimlarning sezgirligi xatolikni vaqt davomida kuchaytiradi [3; 7].

Zamonaviy hisoblash amaliyotida sonli usulni dasturiy muhit bilan uyg'un tanlash ham muhimdir. MATLAB, Python, Mathematica va boshqa paketlarda oddiy va qattiq differensial tenglamalar uchun tayyor solverlar mavjud bo'lsa-da, ularning ichki algoritmini, tolerantlik parametrlarini va qadam boshqaruv mexanizmini tushunmasdan olingan natija noto'g'ri talqin qilinishi mumkin. Shu bois foydalanuvchi faqat dasturiy buyruqni emas, balki usulning matematik asosini ham bilishi zarur [1; 5].

XULOSA

Nochiziqli differensial tenglamalarni sonli yechishda usulning samaradorligi masalaning turiga bog'liq. Oddiy va qattiq bo'lmagan masalalarda klassik RK4 hamda adaptiv Runge–Kutta algoritmlari aniqlik va hisoblash xarajati bo'yicha qulay natija beradi. Qattiq tizimlarda esa implicit Eyler, BDF va boshqa barqaror implicit sxemalar ustunlikka ega. Eyler usuli soddaligi sababli o'quv va dastlabki hisoblashlarda foydali bo'lsa-da, yuqori aniqlik talab etiladigan masalalarda qadamni keskin kichraytirishga majbur qiladi.

Eng maqbul yondashuv - tenglama xususiyatlarini oldindan tahlil qilish, qadam uzunligini boshqarish, xatolikni muntazam tekshirish va barqarorlik talabiga mos algoritmni tanlashdir. Shunday

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

yondashuv nochiziqli modellarni hisoblashda sonli natijaning ishonchliligi, aniqligi va resurs tejamkorligini bir vaqtda ta'minlash imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Normurodov Ch.B. Sonli usullar. I qism. - Toshkent: Termiz nashriyot markazi, 2025. - 298 b.
2. Bahromov S.A. Sonli usullar. - Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti hududiy markazi, 2022.
3. Toshboev S., Imamov A. Hisoblash usullari. - Toshkent: O'ZKITOBSAVDONASHRIYOT NMIU, 2023. - 134 b.
4. Ismatullayev G.P., Kosbergenova M.S. Hisoblash usullari. - Toshkent: Tafakkur-Bo'stoni, 2014. - 240 b.
5. Akramxo'jayev Y.T., Usmanov K.I., Yakubova N.S. Hisoblashning sonli usullari. - Toshkent: Fan ziyosi, 2025. - 153 b.
6. Abdirashidov A. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni bir qadamli sonli usullar yordamida yechish. - Samarqand: SamDU, 2018. - 56 b.
7. Noraliyev N.X., Yusupov M. Matematik modellashtirish va sonli usullar. - Toshkent: Fan zargari, 2024. - 220 b.
8. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. 3rd ed. - Chichester: Wiley, 2016.
9. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd rev. ed. - Berlin: Springer, 1993.
10. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. 2nd rev. ed. - Berlin: Springer, 1996.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.