KASR TARTIBLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASINI MITTAG-LEFFLER FUNKSIYASI YORDAMIDA YECHISH

Ramazonova Shohida Shomuhammadovna
Osiyo Xalqaro Universiteti, "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya. Ishda Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasi o'rganiladi. Masala Volterra tipidagi integral tenglamaga keltirilib, yechim Mittag-Leffler funksiyasi orqali oshkor ko'rinishda topilgan, yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema keltirilgan hamda yechimning katta vaqtlardagi algebraik so'nishi ko'rsatilgan. Natijalar sonli hisoblash bilan tekshirilgan.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglama, Kaputo hosilasi, Rimann–Liuvill integrali, Mittag-Leffler funksiyasi, Koshi masalasi, Laplas almashtirishi, Volterra tenglamasi, algebraik so'nish.

Kirish. Kasr tartibli hosilalar xotirali (irsiy) jarayonlarni, ya'ni qovushqoq-elastik materiallarning relaksatsiyasini, anomal diffuziyani va kasr tartibli ostsillyatorlarni tavsiflashda qo'llaniladi [1–3]. Oddiy differensial tenglamalardan farqli ravishda bunday modellarda hosilaning qiymati funksiyaning butun oldingi tarixiga bog'liq bo'ladi, yechimlar esa eksponensial emas, balki algebraik qonun bo'yicha so'nadi. Qovushqoq-elastik muhitlarning Rjanitsin–Koltunov yadrosi $At^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(-\beta t)$ ham kasr tartibli integral bilan chambarchas bog'liq: $\beta=0$ da u Rimann–Liuvill integralining yadrosiga proporsional. Ushbu ishda Kaputo hosilali asosiy chiziqli tenglamaning yechimi Mittag-Leffler funksiyasi orqali yoziladi, uning xossalari o'rganiladi va natijalar sonli tekshiriladi.

Ta'riflar. $\alpha>0$ tartibli Rimann–Liuvill integrali

$$I^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds, \qquad (1)$$

bu yerda Γ gamma-funksiya. $n-1<\alpha\le n$ uchun Kaputo hosilasi

$$^{C}D^{\alpha}y(t)=I^{n-\alpha}y^{(n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(s)\,ds, \qquad (2)$$

$\alpha=n$ da $^{C}D^{n}y=y^{(n)}$ deb olinadi. Rimann–Liuvill hosilasidan farqli ravishda Kaputo hosilasi odatdagi boshlang'ich shartlarni $y(0),\dots,y^{(n-1)}(0)$ talab qiladi [1, 2].

Masalaning qo'yilishi. Quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$$^{C}D^{\alpha}y(t)+\lambda y(t)=f(t),\quad y(0)=y_0,\quad 0<\alpha\le 1, \qquad (3)$$

bunda λ va y_0 o'zgarmas sonlar, f esa $[0,T]$ da uzluksiz funksiya. Mittag-Leffler funksiyasini

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad E_{\alpha}(z)=E_{\alpha,1}(z) \qquad (4)$$

qator orqali aniqlaymiz. $E_1(z)=e^z$ va $E_2(-z^2)=\cos z$ bo'lgani uchun u eksponentaning umumlashmasi rolini o'ynaydi [1, 3].

Teorema. Har qanday $\lambda,y_0\in\mathbb{R}$ va $f\in C[0,T]$ uchun (3) masalaga ekvivalent Volterra tenglamasi $[0,T]$ da yagona uzluksiz yechimga ega va u quyidagi formula bilan beriladi:

$$y(t)=y_0E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-s)^{\alpha})f(s)\,ds. \qquad (5)$$

Isbot g'oyasi. (3) masala

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

$$y(t)=y_0+I^{\alpha}[f-\lambda y](t) \qquad (6)$$

tenglamaga ekvivalent. Uni ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechamiz:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k I^{\alpha k}(y_0+I^{\alpha}f). \qquad (7)$$

$I^{\alpha k}1=t^{\alpha k}/\Gamma(\alpha k+1)$ bo'lgani uchun y_0 li qism $y_0E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ ga teng. $I^{\alpha k+\alpha}f$ ni (1) bo'yicha yozib va (4) dan foydalanib, ikkinchi qismda (5) dagi integralni hosil qilamiz. $\|(\lambda I^{\alpha})^k\|\le|\lambda|^k T^{\alpha k}/\Gamma(\alpha k+1)\to 0$ bo'lgani uchun (7) qator tekis yaqinlashadi va (6) tenglama yagona yechimga ega. Xuddi shu natijani Laplas almashtirishi bilan ham olish mumkin:

$$Y(s)=\frac{y_0 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda}+\frac{F(s)}{s^{\alpha}+\lambda}, \qquad (8)$$

bunda $\mathscr{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\}=s^{\alpha-\beta}/(s^{\alpha}+\lambda)$ juftligidan foydalaniladi.

Xususiy hollar. $\alpha=1$ da (5) formulaning yadrosi $e^{-\lambda(t-s)}$ ga aylanadi va u o'zgarmasni variatsiyalashning klassik formulasiga o'tadi. $1<\alpha\le 2$, $f=0$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$ bo'lganda xuddi shu usul quyidagi yechimni beradi:

$$y(t)=y_0E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})+y_1\,t\,E_{\alpha,2}(-\lambda t^{\alpha}), \qquad (9)$$

$\alpha=2$ da bu $y_0\cos\sqrt{\lambda}\,t+y_1\sin\sqrt{\lambda}\,t/\sqrt{\lambda}$, ya'ni garmonik ostsillyator yechimidir.

Misollar. 1) $f=0$ va $\alpha=1/2$ bo'lsin. $E_{1/2}(-z)=e^{z^2}\operatorname{erfc}(z)$ bo'lgani uchun (5) dan

$$y(t)=y_0\,e^{\lambda^2 t}\operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{t}\right) \qquad (10)$$

kelib chiqadi. $0<\alpha<1$ va $\lambda>0$ da $t\to\infty$ uchun

$$E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})=\frac{t^{-\alpha}}{\lambda\Gamma(1-\alpha)}+O(t^{-2\alpha}), \qquad (11)$$

ya'ni yechim eksponensial emas, balki algebraik qonun bo'yicha so'nadi.

2) $f\equiv F_0$ bo'lsin. (5) dagi integral $F_0t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda t^{\alpha})=F_0\left(1-E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\right)/\lambda$ ga teng, demak

$$y(t)=\frac{F_0}{\lambda}+\left(y_0-\frac{F_0}{\lambda}\right)E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}). \qquad (12)$$

Muvozanat holati F_0/λ ga yaqinlashish (11) ga ko'ra $t^{-\alpha}$ tezlikda sodir bo'ladi.

Tipik xato. Rimann–Liuvill hosilasida tabiiy boshlang'ich shart $(I^{1-\alpha}y)(0)=c$ ko'rinishida bo'ladi, yechim $y=c\,t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ esa $t=0$ da chegaralanmagan. Shu sababli unga $y(0)=y_0$ shartini qo'yib bo'lmaydi, ikki hosilani almashtirib ishlatish xatodir.

Sonli natijalar. (12) formula $\lambda=1$, $F_0=1$, $y_0=0$ qiymatlarda, ya'ni $y(t)=1-E_{\alpha}(-t^{\alpha})$ uchun hisoblandi. E_{α} qator (4) bo'yicha 50 xona aniqlikda yig'ildi. Natijalar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. $y(t)=1-E_{\alpha}(-t^{\alpha})$ funksiyaning qiymatlari

t	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$	$\alpha=1$
0,5	0,47684	0,44640	0,39347
1	0,57242	0,60689	0,63212
2	0,66380	0,75632	0,86466
5	0,76767	0,88962	0,99326
10	0,82942	0,94090	0,99995

Jadvaldan quyidagilar ko'rinadi. Kichik vaqtlarda kasr tartibli model tezroq o'sadi ($t=0,5$ da $\alpha=1/2$ uchun $0,47684>0,39347$), katta vaqtlarda esa sekinroq yaqinlashadi: $t=10$ da $\alpha=1$ uchun $y=0,99995$,

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

$\alpha=1/2$ uchun esa 0,82942 bo'lib, muvozanat qiymatidan 17 % ga farq qiladi. $t=100$ da $E_{1/2}(-10)=0{,}05614$, asimptotik formula (11) esa 0,05642 beradi, ya'ni farq 0,5 % ni tashkil etadi.

Yechim (6) Volterra tenglamasiga qo'yib tekshirildi: $\alpha=1/2$ da $t=0{,}5$; 1; 2 nuqtalarda qoldiq 10^{-21} dan kichik. Masala L1 sxemasi bilan ham yechildi [4, 5]: $t=2$ da aniq qiymat $y(2)\approx 0{,}66380$, xato esa $h=2{,}5\cdot 10^{-3}$ qadamda $8{,}0\cdot 10^{-5}$ ga teng va qadam bilan birga kamayadi.

Xulosa. 1) Kaputo hosilali chiziqli tenglama uchun Koshi masalasi Volterra tenglamasiga keltirildi va yechimi Mittag-Leffler funksiyalari orqali oshkor ko'rinishda topildi. 2) Yechimning mavjudligi va yagonaligi asoslandi, $1<\alpha\leq 2$ holi uchun ham formula keltirildi. 3) Kasr tartibli tenglama yechimi $t^{-\alpha}$ qonun bo'yicha algebraik so'nadi, $\alpha=1$ da esa eksponensial so'nish tiklanadi. 4) Formulalar Volterra tenglamasiga qo'yish va L1 sxemasi bilan sonli tasdiqlandi.

Adabiyotlar

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego: Academic Press, 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. – Berlin: Springer, 2014.
4. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. – Berlin: Springer, 2010.
5. Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. – 2007. – Vol. 225. – P. 1533–1552.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.