BESSEL OPERATORI UCHUN TESKARI SPEKTRAL MASALALAR VA POTENSIALNI SPEKTRAL MA'LUMOTLAR BO'YICHA TIKLASH

Jurayev Shaxzod
Osiyo xalqaro universiteti "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrasi assistent professori

Annotatsiya. Ushbu tezisda $(0,\pi)$ oraliqda berilgan va $x=0$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lgan Bessel tipidagi Shturm–Liuvill operatori uchun teskari spektral masalalar ko'rib chiqiladi. Xos qiymatlarning asimptotikasi keltirilgan, almashtirish operatori va Gelfand–Levitan tipidagi integral tenglama yordamida potensialni spektral ma'lumotlar bo'yicha tiklash algoritmi bayon qilingan, ikki spektr bo'yicha Borg tipidagi yagonalik teoremasi muhokama qilingan. G'alayonlanmagan operator xos qiymatlarining aniq va asimptotik qiymatlari sonli taqqoslangan.

Kalit so'zlar: Bessel operatori, Shturm–Liuvill operatori, teskari spektral masala, xos qiymat, normallovchi o'zgarmas, almashtirish operatori, Gelfand–Levitan tenglamasi, Borg teoremasi, yagonalik.

KIRISH

Teskari spektral masalalarda differensial operatorning spektral xarakteristikalari (xos qiymatlari, normallovchi o'zgarmaslari, spektral funksiyasi) ma'lum deb hisoblanib, uning koeffitsiyentlarini, xususan potensialini tiklash talab qilinadi. Regulyar Shturm–Liuvill operatori uchun bu nazariya G. Borg [1], I.M. Gelfand va B.M. Levitan [2], V.A. Marchenko [3] ishlarida yaratilgan: potensial ikki spektr yoki spektr va normallovchi o'zgarmaslar bo'yicha bir qiymatli aniqlanishi va uni tiklashning konstruktiv usullari isbotlangan [4].

Amaliy masalalarda ko'pincha operator koeffitsiyenti chegaraviy nuqtada maxsuslikka ega bo'ladi. Eng muhim misol — sferik simmetrik Shryodinger tenglamasining radial qismi bo'lib, unda $\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$ markazdan qochma had qatnashadi; bu Bessel tipidagi $\frac{\nu^2-1/4}{x^2}$ potensialning $\nu=\ell+\frac{1}{2}$ bo'lgan xususiy holidir. Bunday maxsuslik klassik usullarni to'g'ridan-to'g'ri qo'llash imkonini bermaydi: yechimlarning nol atrofidagi xatti-harakati, xos qiymatlar asimptotikasi va almashtirish operatori yadrosi ν parametrga bog'liq bo'ladi. Bessel operatori uchun teskari masalalar J.-C. Guillot va J.V. Ralston [5], R. Carlson [6], G. Freiling va V.A. Yurko [7], A. Kostenko, A. Sakhnovich va G. Teschl [8] ishlarida o'rganilgan.

Tezisning maqsadi — Bessel operatori uchun asosiy teskari spektral masalalarni yagona sxemada bayon qilish, potensialni tiklash algoritmini keltirish va xos qiymatlar asimptotikasining aniqligini sonli tekshirish.

ASOSIY QISM

Masalaning qo'yilishi. $(0,\pi)$ oraliqda $L=L(\nu,q)$ chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\ell y := -y''+\left(\frac{\nu^2-1/4}{x^2}+q(x)\right)y=\lambda y, \qquad 0<x<\pi, \tag{1}$$

$$y(x)=O\left(x^{\nu+1/2}\right),\ x\to+0, \qquad y(\pi)=0, \tag{2}$$

bu yerda $\nu>0$ — berilgan son, $q(x)$ — haqiqiy qiymatli potensial, $q\in L^2(0,\pi)$, λ — spektral parametr. $\varphi(x,\lambda)$ orqali (1) tenglamaning $x\to+0$ da $\varphi(x,\lambda)\sim x^{\nu+1/2}$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. $q\equiv 0$ bo'lganda, $\rho=\sqrt{\lambda}$ deb,

$$\varphi_0(x,\lambda)=\Gamma(\nu+1)\,2^{\nu}\rho^{-\nu}\sqrt{x}\,J_{\nu}(\rho x) \tag{3}$$

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

ga ega bo'lamiz, bu yerda J_ν — birinchi tur Bessel funksiyasi [9].

To'g'ri masala. (1)–(2) masalaning spektri haqiqiy, oddiy xos qiymatlardan iborat: $\lambda_1<\lambda_2<\dots$, $\lambda_n\to+\infty$. Ular $\Delta(\lambda)=\varphi(\pi,\lambda)$ xarakteristik funksiyaning nollaridir. $\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx$ sonlar *normallovchi o'zgarmaslar* deyiladi, $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\ge1}$ esa *spektral ma'lumotlar* deyiladi. $\rho_n=\sqrt{\lambda_n}$ va $\beta_n=n+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}$ deb belgilasak, quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$\rho_n=\beta_n+\frac{\omega}{\pi\beta_n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \omega=\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt-\frac{4\nu^2-1}{8\pi}. \tag{4}$$

$\nu=\frac{1}{2}$ bo'lganda (4) formula regulyar holdagi ma'lum $\rho_n=n+\frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi q\,dt+o(1/n)$ asimptotikaga o'tadi. $q\equiv0$ bo'lganda $\rho_n^0=\mu_n/\pi$, bu yerda μ_n — J_ν funksiyaning musbat nollari, va (4) McMahon formulasi bilan mos keladi [9]. Bu holda normallovchi o'zgarmaslar aniq hisoblanadi:

$$\alpha_n^0=\frac{\pi^2}{2}(\Gamma(\nu+1)\,2^\nu)^2(\rho_n^0)^{-2\nu}J_{\nu+1}^2(\mu_n). \tag{5}$$

Sonli tekshiruv. (4) asimptotikaning aniqligini tekshirish uchun $q\equiv0$ holda ρ_n^0 ning aniq qiymatlari (Bessel funksiyasi nollari bo'yicha sonli hisoblangan) asimptotik qiymatlar bilan 1-jadvalda taqqoslangan. Jadvalda "aniq" — ρ_n^0 ning aniq qiymati, β_n — asimptotikaning bosh hadi, (4) — $q\equiv0$ bo'lganda (4) formula bo'yicha hisoblangan qiymat.

1-jadval. $q\equiv0$ holda $\rho_n^0=\mu_n/\pi$ ning aniq va asimptotik qiymatlari

ν	$n=1$			$n=2$			$n=3$		
	aniq	β_n	**(4)**	**aniq**	β_n	**(4)**	**aniq**	β_n	**(4)**
1	1.2197	1.2500	1.2196	2.2331	2.2500	2.2331	3.2383	3.2500	3.2383
1.5	1.4303	1.5000	1.4325	2.4590	2.5000	2.4595	3.4709	3.5000	3.4711
2	1.6347	1.7500	1.6414	2.6793	2.7500	2.6809	3.6987	3.7500	3.6993

Jadvaldan ko'rinadiki, bosh had β_n ning xatoligi n ortishi bilan kamayadi, $\frac{\omega}{\pi\beta_n}$ tuzatma hisobga olinganda esa $n=3$ dayoq xatolik 10^{-3} dan kichik bo'ladi. $\nu=1.5$ hol $\ell=1$ orbital kvant soniga mos keladi.

Teskari masalalarning qo'yilishi. Quyidagi ikki masalani qaraymiz.

1-masala. $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\ge1}$ spektral ma'lumotlar bo'yicha $q(x)$ potensialni tiklang.

2-masala (Borg tipidagi). (1)–(2) masalaning $\{\lambda_n\}$ spektri va $y(\pi)=0$ shart $y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ shart bilan almashtirilgan masalaning $\{\tilde\lambda_n\}$ spektri bo'yicha $q(x)$ va H ni tiklang.

1-teorema (yagonalik). Agar $L(\nu,q)$ va $L(\nu,\tilde q)$ masalalar uchun barcha n larda $\lambda_n=\tilde\lambda_n$, $\alpha_n=\tilde\alpha_n$ bo'lsa, u holda $(0,\pi)$ da deyarli hamma joyda $q=\tilde q$. Xuddi shuningdek, ikki spektr q va H ni bir qiymatli aniqlaydi [5–7, 10].

Almashtirish operatori. Yagonalikni isbotlash va tiklash algoritmini qurishning asosiy vositasi — almashtirish operatori [3, 7]:

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t,\lambda)\,dt,\qquad K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{6}$$

Bu yerda $K(x,t)$ yadro λ ga bog'liq emas, shuning uchun (6) tasvir q ni to'la K yadro orqali ifodalaydi.

Gelfand–Levitan tenglamasi. Spektral ma'lumotlar yordamida quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}-\frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right). \tag{7}$$

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

U holda har bir tayinlangan $0<x\leq\pi$ uchun $K(x,t)$ yadro ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasining yagona yechimi bo'ladi:

$$K(x,t)+F(x,t)+\int_0^x K(x,s)\,F(s,t)\,ds=0, \qquad 0<t<x. \tag{8}$$

Tiklash algoritmi. Yuqoridagilardan potensialni tiklashning quyidagi konstruktiv algoritmi kelib chiqadi:

1) berilgan $\{\lambda_n,\alpha_n\}$ va (3), (5) formulalar bo'yicha $F(x,t)$ funksiya (7) qator orqali hisoblanadi;

2) har bir x uchun (8) integral tenglama yechilib, $K(x,t)$ topiladi;

3) potensial (6) dan kelib chiqadigan formula bo'yicha tiklanadi:

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{9}$$

Amaliy hisoblashlarda (7) qatorning dastlabki N hadi olinadi va (8) tenglama kvadratur formulalar (Nyström usuli) yordamida chiziqli algebraik sistemaga keltiriladi. (4) asimptotika sababli qator hadlari tez kamayadi, bu esa algoritmning turg'unligini ta'minlaydi. Xususan, 1-jadvaldagi ρ_n^0 qiymatlari $F(x,t)$ ning ikkinchi qo'shiluvchisini hisoblash uchun bevosita ishlatiladi.

XULOSA

Tezisda Bessel tipidagi maxsus Shturm–Liuvill operatori uchun teskari spektral masalalar ko'rib chiqildi. Xos qiymatlarning ν parametrga bog'liq (4) asimptotikasi keltirildi va uning aniqligi sonli tasdiqlandi: tuzatma had hisobga olinganda $n=3$ dayoq xatolik 10^{-3} dan kichik. Spektral ma'lumotlar va ikki spektr bo'yicha yagonalik teoremalari bayon qilindi, almashtirish operatori va Gelfand–Levitan tenglamasi asosida potensialni tiklashning konstruktiv algoritmi berildi. Natijalar kvant mexanikasidagi sochilish masalalarida, silindrik va sferik simmetriyali tebranish masalalarida hamda teskari masalalarni sonli yechish usullarini ishlab chiqishda qo'llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Mathematica. – 1946. – Vol. 78. – P. 1–96.

2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1951. – Т. 15, № 4. – С. 309–360.

3. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 331 с.

4. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 2. – С. 3–63.

5. Guillot J.-C., Ralston J.V. Inverse spectral theory for a singular Sturm–Liouville operator on [0,1] // Journal of Differential Equations. – 1988. – Vol. 76, No. 2. – P. 353–373.

6. Carlson R. Inverse spectral theory for some singular Sturm–Liouville problems // Journal of Differential Equations. – 1993. – Vol. 106, No. 1. – P. 121–140.

7. Freiling G., Yurko V. Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications. – New York: Nova Science Publishers, 2001.

8. Kostenko A., Sakhnovich A., Teschl G. Inverse eigenvalue problems for perturbed spherical Schrödinger operators // Inverse Problems. – 2010. – Vol. 26, No. 10. – Article 105013.

9. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 1944. – 804 p.

10. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. – Utrecht: VSP, 2002.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.