KASR TARTIBLI OPERATOR QATNASHGAN PSEVDOPARABOLIK VA UCHINCHI TARTIBLI PARABOLOGIPERBOLIK TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR BO'YICHA ADABIYOTLAR TAHLILI

Ro'ziqulov Javohir Ulug'bek o'g'li
Magistrant
javohirroziqulov07@gmail.com
DOI:https://doi.org/10.5281/zenodo.23601015

Annotatsiya

Kasr tartibli differensial tenglamalar xotira effektlari va lokal bo'lmagan xususiyatlarga ega murakkab jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu sohada, ayniqsa kasr tartibli psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalar bo'yicha tadqiqotlar jadal rivojlanmoqda, ammo mavjud bilimlarni tizimlashtirish va umumlashtirish zarurati mavjud. Ushbu tadqiqotning maqsadi kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar bo'yicha so'nggi adabiyotlarni tizimli tahlil qilishdan iborat. Tadqiqot metodologiyasi 2020-yildan 2024-yilgacha bo'lgan davrda Scopus, Web of Science, Google Scholar kabi xalqaro va milliy ma'lumotlar bazalarida nashr etilgan ilmiy maqolalarni qamrab olgan keng qamrovli adabiyot qidiruvi va tahliliga asoslangan. O'tkazilgan tahlil kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun nolokal shartlar bilan bog'liq boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va yaxshi qo'yilganligi bo'yicha muhim natijalarni aniqladi. Xususan, Banach fazolarida yechimlarning mavjudligi va yagonaligi, shuningdek, yarimguruhlar nazariyasi va a priori baholash usullaridan foydalanilgan ishlar ko'rib chiqildi. Ushbu tahlil kasr tartibli differensial tenglamalarning murakkab real dunyo hodisalarini, jumladan, anomallik diffuziya va viskoelastik materiallar xatti-harakatini modellashtirishdagi ahamiyatini tasdiqlaydi va kelajakdagi tadqiqot yo'nalishlari uchun asos yaratadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglamalar, psevdoparabolik tenglamalar, parabologiperbolik tenglamalar, adabiyotlar tahlili, nolokal shartlar, yechimning mavjudligi va yagonaligi, banach fazolari

Kirish

Differensial tenglamalar, xususan, xususiy hosilali differensial tenglamalar (XHDD), fizika, biologiya, muhandislik va boshqa ko'plab fan sohalaridagi murakkab jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Ular tabiatdagi ko'plab hodisalarni, jumladan, issiqlik tarqalishi, suyuqlik dinamikasi, to'lqin tarqalishi va kvant mexanikasi kabi fundamental jarayonlarni tavsiflashda muhim rol o'ynaydi. So'nggi yillarda kasr tartibli hisoblash (fractional calculus) nazariyasi va uning qo'llanish sohalari jadal rivojlanib bormoqda. Klassik butun tartibli modellar bilan solishtirganda, kasr tartibli hosilalar xotira effektlari va lokal bo'lmaga xususiyatlarga ega bo'lgan tizimlarni aniqroq tavsiflash imkonini beradi [14, 15]. Bu esa, o'z navbatida, turli xil murakkab hodisalarni, masalan, g'ovak muhitlarda suyuqlik oqimi, viskoelastik materiallar xatti-harakati, anomallik diffuziya va issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi [16, 18]. Kasr tartibli differensial tenglamalar real dunyo hodisalarining murakkabligini yanada to'liqroq aks

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

ettirishga qodir bo‘lganligi sababli, ularni chuqur o‘rganish zamonaviy matematik fizika va amaliy matematika uchun dolzarb vazifa hisoblanadi.

Psevdoparabolik tenglamalar (pseudoparabolic equations) yuqorida qayd etilgan sohalarda, xususan, issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasida, g‘ovak muhitlarda filtrlash jarayonlarida va viskoelastiklikda keng qo‘llaniladi. Ularning o‘ziga xos tuzilishi, ya’ni vaqt bo‘yicha hosilaning yuqori tartibli fazoviy hosilaga bog‘liqligi, ularni klassik parabolik tenglamalardan ajratib turadi va murakkabroq dinamikani aks ettirishga imkon beradi [20, 22]. Kasr tartibli hosilalar bilan birgalikda psevdoparabolik tenglamalar xotira effektlari mavjud bo‘lgan tizimlarni yanada aniqroq modellashtirish uchun kuchli vosita bo‘lib xizmat qiladi [24, 26]. Ushbu turdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganish nazariy va amaliy jihatdan katta qiziqish uyg‘otadi, chunki ularning yechimlari ko‘plab fizikaviy jarayonlarning uzoq muddatli xatti-harakatini tushunishga yordam beradi [9, 28]. Jumladan, Alimov va Xolmatov tomonidan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o‘rganilgan [8, 9].

Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar (third-order parabolo-hyperbolic type differential equations) esa aralash tipdagi tenglamalar sinfiga kiradi va ko‘pincha to‘lqin tarqalishi, plazma fizikasi, chegara qatlami nazariyasi kabi sohalarda uchraydi. Bu tenglamalarning o‘ziga xosligi shundaki, ular domenning turli qismlarida parabolik va giperbolik xususiyatlarni namoyon etadi, bu esa ularning yechimlarining xatti-harakatini tushunishni murakkablashtiradi va maxsus yondashuvlarni talab qiladi. Kasr tartibli hosilalarning ushbu tenglamalarga kiritilishi ularning modellashtirish imkoniyatlarini yanada kengaytiradi va real jarayonlarni yanada aniqroq aks ettirishga yordam beradi, ayniqsa, muhitning nohomogenligi yoki xotira effektlari mavjud bo‘lgan holatlarda [1, 2, 3]. O‘zbekistonlik olimlar tomonidan ham kasr tartibli hosilali uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar chuqur o‘rganilgan va muhim natijalar olingan [4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27]. Bu tadqiqotlar ushbu sohaning mahalliy ilmiy muhitda ham dolzarbligini va rivojlanish salohiyatini ko‘rsatadi.

Ushbu maqola kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalarning nazariy jihatlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Xususan, biz ushbu ikki xil tenglama sinfi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi, yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalarini tahlil qilishga e’tibor qaratamiz. Kasr tartibli hosilalarning mavjudligi tenglamalarning xususiyatlarini sezilarli darajada o‘zgartiradi va klassik butun tartibli tenglamalarga nisbatan yangi matematik muammolarni keltirib chiqaradi. Bu esa ularni chuqur va tizimli o‘rganishni talab qiladi, chunki kasr tartibli operatorlar lokal bo‘lmagan xususiyatlarga ega bo‘lib, an’anaviy usullar har doim ham qo‘llanilmasligi mumkin.

Shu bilan birga, kasr tartibli hosilalar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning umumiy nazariyasi, ayniqsa, ularning aralash xususiyatlari va psevdoparabolik tabiatidan kelib chiqadigan o‘ziga xos qiyinchiliklarni hisobga olgan holda, hali yetarlicha o‘rganilmagan va ochiq savol bo‘lib qolmoqda. Mavjud tadqiqotlar ko‘pincha alohida holatlarga yoki cheklangan domenlarga qaratilgan bo‘lib, ushbu ikki sinf tenglamalarning kasr tartibli umumlashtirilgan shakllari uchun yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalarini qamrab oluvchi keng qamrovli va qiyosiy tahlilga ehtiyoj sezilmoqda. Ushbu bo‘shliqni to‘ldirish, kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirish va ularning amaliy qo‘llanish sohalarini kengaytirish uchun muhim ahamiyatga ega.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Ushbu tadqiqotning maqsadi kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalarning nazariy jihatlarini, xususan, boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi va yechimlarning xossalarini chuqur tahlil qilishdan iborat. Bu maqsadga erishish uchun quyidagi tadqiqot savollari (TS) ilgari suriladi:

TS1: Kasr tartibli differensial operatorlarning ta'riflari va asosiy xossalarini, shuningdek, ularning psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalarga tatbiqini tizimli ravishda o'rganish va umumlashtirish qanday amalga oshiriladi? Bu operatorlarning xususiyatlari klassik butun tartibli operatorlardan qanday farq qiladi va bu farqlar tenglamalar yechimlarining xatti-harakatiga, masalan, xotira effektlari va lokal bo'lmagan bog'liqliklarning paydo bo'lishiga qanday ta'sir ko'rsatadi? Ushbu savol kasr tartibli hisoblashning fundamental asoslarini tushunish va ularni murakkab differensial tenglamalar kontekstida qo'llash uchun muhimdir.

TS2: Kasr tartibli operator qatnashgan psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalarini qanday usullar yordamida isbotlash mumkin? Bu masalalarni yechishda qanday funksional fazolar, masalan, Sobolev fazolari, va operator nazariyasi usullari, jumladan, yarimguruhlar nazariyasi yoki Galorkin usuli kabi yondashuvlar samarali hisoblanadi? Bu savol psevdoparabolik tenglamalarning o'ziga xos tuzilishini kasr tartibli hosilalar bilan birgalikda tahlil qilishning matematik asoslarini yaratishga qaratilgan.

TS3: Kasr tartibli umumlashtirilgan uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalarini aniqlashda qanday yondashuvlar qo'llaniladi? Bu turdagi aralash tipdagi tenglamalarning o'ziga xos xususiyatlari, xususan, parabolik va giperbolik sohalarning o'zaro ta'siri yechimlar nazariyasiga qanday ta'sir ko'rsatadi va bu ta'sirlarni qanday matematik vositalar yordamida tahlil qilish mumkin? Ushbu savol aralash tipdagi tenglamalarning murakkab tabiatini kasr tartibli hosilalar bilan birgalikda o'rganishning nazariy qiyinchiliklarini hal qilishga qaratilgan.

Asosiy qism

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili: Differensial tenglamalar nazariyasida kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi tenglamalarni o'rganish so'nggi yillarda matematik fizika va amaliyotning muhim yo'nalishlaridan biriga aylandi. Bu turdagi tenglamalar klassik butun tartibli modellarga nisbatan murakkabroq tizimlarni, xususan, xotira effektlari va lokal bo'lmagan xususiyatlarga ega jarayonlarni tavsiflashda yuqori aniqlikka ega ekanligi bilan ajralib turadi. Adabiyotlarda bunday tenglamalarning nazariy asoslari, yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalari chuqur o'rganilmoqda. Tadqiqotlar asosan psevdoparabolik va aralash tipdagi tenglamalarga qaratilgan bo'lib, ularning har biri o'ziga xos matematik muammolarni keltirib chiqaradi.

Kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar sohasida olib borilgan tadqiqotlar ushbu tenglamalarning turli shartlar ostida yechimlarining mavjudligi va yagonaligini o'rganishga bag'ishlangan. Xususan, Al-Omari, Al-Smadi va Al-Refai tomonidan olib borilgan ishlar kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun nolokal shartlar bilan bog'liq boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimlarini Banach fazolarida o'rganishga qaratilgan bo'lib, ularning mavjudligi va yagonaligi ko'rsatilgan [14, 24, 28]. Bu tadqiqotlar ushbu turdagi tenglamalarning nazariy asoslarini mustahkamlashda muhim ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, Li, Wang va Liu kabi olimlar o'z ishlarida o'zgaruvchan koeffitsiyentli kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligini tahlil qilganlar [16, 22]. Bu esa real dunyo hodisalarini modellashtirishda yanada moslashuvchan modellarni yaratish imkonini beradi. Nolokal shartlar bilan bog'liq boshlang'ich-chegaraviy masalalar Li, Li va Wang tomonidan ham

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

ko‘rib chiqilgan bo‘lib, ularning yechimlari xossalari o‘rganilgan [20]. Zhou, Li va Wang tomonidan olib borilgan tadqiqotlar esa noloyiq manba hadiga ega kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalarning korrekt qo‘yilganligini tahlil qilgan [15, 26]. Bu ishlar noloyiq manbalar ta’sirida tizimlarning xatti-harakatini tushunish uchun muhimdir. El-Sayed va El-Sayed tomonidan xotira effektlariga ega kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar sinfi o‘rganilgan bo‘lib, bu turdagi tenglamalar viskoelastik materiallar va anomallik diffuziya jarayonlarini tavsiflashda keng qo‘llaniladi [18]. O‘zbekistonlik tadqiqotchilar ham bu yo‘nalishda faol ish olib bormoqdalar. Xususan, Kholmatov va Alimov kasr tartibli psevdoparabolik tenglama uchun chegaraviy masalani [8] hamda nolokal shartli boshlang‘ich-chegaraviy masalani o‘rganib, yechimlarning mavjudligi va yagonaligini ko‘rsatganlar [9]. Bu ishlar mahalliy ilmiy maktabning xalqaro darajadagi tadqiqotlarga qo‘shgan hissasini aks ettiradi.

Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar va ularning kasr tartibli umumlashtirishlari ham matematik fizikaning dolzarb muammolaridan biridir. Bu turdagi tenglamalar aralash tipdagi tenglamalar sinfiga kiradi va ularning nazariy tahlili murakkabliklari bilan ajralib turadi. Ayniqsa, kasr tartibli hosilalar kiritilishi tenglamalarning xususiyatlarini yanada boyitadi va yangi tadqiqot yo‘nalishlarini ochadi. Ruziev, M. M. va uning hammualliflari tomonidan bu sohada keng ko‘lamli tadqiqotlar olib borilgan. Ular uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun kasr tartibli hosila ishtirokida chegaraviy masalalarni turli xil chegaraviy shartlar va domenlarda o‘rganishgan. Jumladan, to‘g‘ri burchakli sohada kasr tartibli hosilali uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalar Hasanov, Ruziev va Alimov [3], Ruziev va Akhmedov [4], Hasanov va Ruziev [10], Ruziev va Abdurakhmonov [6, 11, 12, 17, 25] tomonidan tahlil qilingan. Bu ishlarda yechimlarning mavjudligi va yagonaligi, shuningdek, ularning silliqlik xossalari o‘rganilgan. Umumiyroq chegaraviy masalalar Ruziev va Abdurakhmonov [1, 21, 23, 27], Ruziev va Akhmedov [2], Islomov va Ruziev [5], Djuraev va Ruziev [7], Hasanov va Ruziev [13], Ghafri va Ruziev [19] kabi mualliflar tomonidan ham ko‘rib chiqilgan. Ushbu tadqiqotlarda energiya integral usuli, funksional analiz usullari va qat’iy qisqartirish tamoyili kabi matematik vositalar keng qo‘llanilgan. Bu ishlar uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalarning kasr tartibli umumlashtirishlari uchun nazariy asoslarni yaratishda muhim rol o‘ynaydi va ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlarini kengaytiradi.

Mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasi jadal rivojlanib bormoqda. Tadqiqotlar asosan yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va korrekt qo‘yilganligini aniqlashga qaratilgan. Biroq, bu sohada hali ham bir qator ochiq muammolar mavjud. Masalan, murakkabroq geometrik domenlarda, yuqori o‘lchovli fazolarda, shuningdek, turli xil nolokal va integral shartlar bilan bog‘liq masalalarni o‘rganish dolzarb hisoblanadi. Bundan tashqari, kasr tartibli operatorlarning turli ta’riflari (Kaputo, Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov va boshqalar) orasidagi farqlarni hisobga olgan holda, ularning yechimlarga ta’sirini chuqurroq tahlil qilish, shuningdek, bu turdagi tenglamalar uchun sonli usullarni ishlab chiqish va ularning samaradorligini baholash muhim yo‘nalishlardandir. Nonlinear hadlarga ega tenglamalar, invers masalalar va stoxastik kasr tartibli differensial tenglamalar ham kelajakdagi tadqiqotlar uchun katta salohiyatga ega.

Tadqiqot metodologiyasi: Tadqiqot metodologiyasi ushbu maqolada ko‘rib chiqilayotgan kasr tartibli operator qatnashgan psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar sohasidagi mavjud adabiyotlarni tizimli tahlil qilish uchun qo‘llanilgan yondashuvni batafsil bayon etadi. Ushbu metodologiya tadqiqot savollariga javob berish, mavjud bilimlardagi bo‘shliqlarni

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

aniqlash va kelajakdagi tadqiqot yo‘nalishlarini belgilash maqsadida adabiyotlarni keng qamrovli va xolis ko‘rib chiqishni ta’minlash uchun ishlab chiqilgan.

Adabiyotlarni qidirish jarayoni 2020-yildan 2024-yilgacha bo‘lgan davrda nashr etilgan ilmiy maqolalarni qamrab oldi. Qidiruv Scopus, Web of Science, Google Scholar kabi xalqaro ilmiy ma’lumotlar bazalarida, shuningdek, "O'zbekiston Matematika Jurnali" va "Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti" kabi mintaqaviy va milliy jurnallar platformalarida amalga oshirildi. Ushbu ma’lumotlar bazalari differensial tenglamalar va kasr tartibli hisoblash sohasidagi eng muhim nashrlarni o‘z ichiga oladi. Qidiruvda quyidagi asosiy kalit so‘zlar va ularning kombinatsiyalari o‘zbek va ingliz tillarida ishlatildi: "kasr tartibli differensial tenglamalar", "fractional differential equations", "psevdoparabolik tenglamalar", "pseudoparabolic equations", "uchinchi tartibli parabologiperbolik tenglamalar", "third-order parabolic-hyperbolic equations", "boshlang'ich-chegaraviy masalalar", "initial-boundary value problems", "yechimlarning mavjudligi", "existence of solutions", "yagonalik", "uniqueness", "silliqlik xossalari", "regularity properties", "kasr tartibli operatorlar", "fractional operators". Kalit so‘zlarning keng doirasi mavzuga oid barcha tegishli tadqiqotlarni aniqlashga yordam berdi.

Dastlabki qidiruv natijasida jami 120 dan ortiq potentsial manba aniqlandi. Ushbu manbalar orasidan dublikatlar olib tashlandi, bu esa 85 ta noyob maqolani qoldirdi. Keyin, sarlavha va annotatsiyalar asosida dastlabki skrining o‘tkazildi. Bu bosqichda mavzuga bevosita aloqador bo‘lmagan yoki belgilangan tadqiqot doirasidan tashqarida bo‘lgan maqolalar chiqarib tashlandi. Skriningdan so‘ng 45 ta maqola to‘liq matnli tahlil uchun tanlab olindi. Har bir tanlangan maqola, maqolaning asosiy mazmuni va tadqiqot savollariga mos kelishini ta’minlash maqsadida, chuqur o‘rganildi.

Maqolalar kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik yoki uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalarga bag‘ishlangan bo‘lishi kerak.

Tadqiqotlar boshlang‘ich-chegaraviy masalalar uchun yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalarini o‘rganishi lozim.

Nashr etilgan sanasi 2020-yil va undan keyingi yillar bo‘lishi shart. Maqolalar nufuzli, referentlanadigan ilmiy jurnallarda chop etilgan bo‘lishi kerak. Bu mezon, masalan, Al-Omari, Al-Smadi va Al-Refai tomonidan 2023-yilda nashr etilgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar bo‘yicha ishlarga [14] yoki Ruziev va Abdurakhmonovning 2023-yildagi uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar bo‘yicha tadqiqotlariga [1] mos keladi.Tadqiqotlar nazariy matematik tahlilga asoslangan bo‘lishi kerak. Mavzuga aloqador bo‘lmagan yoki kasr tartibli operatorlarni o‘z ichiga olmaydigan differensial tenglamalar haqidagi maqolalar. Faqat butun tartibli differensial tenglamalarni o‘rganadigan ishlar. Konferensiya tezislari, kitob boblari yoki dissertatsiyalar (agar ular keyinchalik jurnal maqolasi sifatida nashr etilmagan bo‘lsa). 2020-yilgacha nashr etilgan manbalar. Dublikat maqolalar. To‘liq matni mavjud bo‘lmagan yoki sifat jihatidan yetarli bo‘lmagan tadqiqotlar. To‘liq matnli tahlil va yuqorida keltirilgan kiritish/chiqarish mezonlari asosida, yakuniy tahlilga jami 28 ta maqola kiritildi. Bu maqolalar, masalan, Hasanov va Ruzievning 2020-yildagi ishlari [10] hamda Kholmatov va Alimovning 2022-yildagi kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar bo‘yicha tadqiqotlari [8] kabi mavzuning asosiy jihatlarini qamrab oladi. Tanlangan manbalar ushbu tadqiqotning asosini tashkil etib, kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasining hozirgi holatini har tomonlama ko‘rib chiqish imkonini beradi. Maqolalardan ma’lumotlar tizimli ravishda ajratib olindi va mavjudlik, yagonalik, silliqlik kabi asosiy xususiyatlar bo‘yicha sintez qilindi. Bu jarayon har bir tadqiqotning metodologiyasi, asosiy natijalari va xulosalarini

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

chuqur tushunishni ta'minladi. Ushbu metodologiya tadqiqotning ishonchliligi va ob'ektivligini oshirishga xizmat qiladi.

Tahlil va natijalar: O'tkazilgan adabiyot tahlili kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi differensial tenglamalar nazariyasi so'nggi yillarda matematik fizika va amaliyotning eng jadal rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biri ekanligini ko'rsatdi. Tadqiqotlar asosan ikki asosiy yo'nalishga qaratilgan: kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar va uchinchi tartibli parabologiperbolik (aralash) tipdagi tenglamalar. Har bir yo'nalish o'ziga xos nazariy muammolarni va amaliy qo'llanish sohalarini qamrab oladi. Umumiy qilib aytganda, ushbu turdagi tenglamalar xotira effektlari, lokal bo'lmagan xususiyatlar va murakkab o'zaro ta'sirlarga ega bo'lgan tizimlarni modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar ushbu tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimlarini o'rganishga bag'ishlangan. Xususan, Al-Omari, Al-Smadi va Al-Refai tomonidan olib borilgan ishlar nolokal shartlar bilan bog'liq bo'lgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligini Banach fazolarida ko'rsatgan [14, 24, 28]. Bu tadqiqotlar yechimlarning yaxshi qo'yilganligini ta'minlash uchun qat'iy matematik asoslarni taqdim etadi. Shuningdek, Zhou, Li va Wang [15] tomonidan nolokal shartlarga ega bo'lgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yaxshi qo'yilganligi tahlil qilingan. Ular yechimlarning mavjudligi va yagonaligini ko'rsatish uchun yarimguruhlar nazariyasi va a priori baholash usullaridan foydalanganlar.

O'zgaruvchan koeffitsiyentlarga ega bo'lgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar ham tadqiqotchilar e'tiborida bo'lgan. Liu, Li va Wang [16, 22] bunday tenglamalar sinfi uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligini o'rganganlar. Ularning ishlari funksional analiz usullari, xususan, qat'iy qisqartirish akslantirish prinsipi va energiya usuliga asoslangan. Bundan tashqari, Li, Li va Wang [20] nolokal shartlarga ega bo'lgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni tahlil qilib, yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlaganlar. El-Sayed va El-Sayed [18] xotira effektlariga ega bo'lgan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar sinfini ko'rib chiqib, ularning yechim xossalarini o'rganganlar. Bu tadqiqotlar kasr tartibli modellarning real dunyo hodisalarini, masalan, viskoelastik materiallar va anomallik diffuziya jarayonlarini tavsiflashdagi ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.

So'nggi yillarda kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun nolokal shartlar bilan bog'liq masalalar bo'yicha tadqiqotlar faollashgan. Masalan, Li, Wang va Liu [26] nolokal shartli va chiziqsiz manba hadli kasr tartibli psevdoparabolik tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masalani o'rganib, yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlaganlar. Kholmatov va Alimov [8, 9] ham kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun nolokal shartli boshlang'ich-chegaraviy masalalarni O'zbekiston Matematika Jurnali va Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti jurnallarida tahlil qilganlar. Bu ishlar ushbu turdagi tenglamalarning nazariy asoslarini kengaytirishga xizmat qiladi va ularning amaliy qo'llanilishini yanada mustahkamlaydi.

Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar, ayniqsa, kasr tartibli hosila ishtirokidagi aralash tipdagi tenglamalar bo'yicha tadqiqotlar ham sezilarli darajada rivojlangan. O'zbekistonlik olimlar, xususan, Ruziev M.M. va uning hammualliflari ushbu yo'nalishda qator muhim natijalarga erishganlar. Ular asosan to'g'ri burchakli sohalarda kasr tartibli hosila ishtirokidagi uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganganlar. Masalan, Ruziev va Abdurakhmonov [1, 6, 11, 12, 17, 21, 23, 25, 27] turli yillarda chop etilgan maqolalarida ushbu masalalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlaganlar. Ularning ishlari O'zbekiston

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Matematika Jurnali, Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti kabi milliy jurnallarda, shuningdek, xalqaro jurnallarda ham nashr etilgan.

Hasanov, Ruziev va Alimov [3, 10, 13, 19] ham kasr tartibli hosila ishtirokidagi uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tahlil qilganlar. Bu tadqiqotlar chegaraviy shartlarning turli kombinatsiyalari ostida yechimlarning xossalarini o'rganishga qaratilgan. Ruziev va Akhmedov [2, 4] tomonidan olib borilgan ishlar ham xuddi shunday turdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, ular yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlashda energiya usuli va qat'iy qisqartirish akslantirish prinsipidan foydalanganlar. Islomov va Ruziev [5] ham uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani kasr tartibli hosila ishtirokida tahlil qilganlar. Djuraev va Ruziev [7] ham ushbu sohada muhim natijalarga erishganlar.

Ushbu tadqiqotlarning aksariyati chegaraviy masalalarni o'rganishga qaratilgan bo'lib, ularda yechimlarning mavjudligi va yagonaligi asosiy natija sifatida keltirilgan. Ko'pincha, bu natijalarga a priori baholashlar, energiya integral usuli, funksional analizning qat'iy qisqartirish akslantirish prinsipi yoki Galerkin usuli kabi usullar yordamida erishilgan. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli hosilaning kiritilishi tenglamaning xossalarini sezilarli darajada o'zgartiradi va klassik butun tartibli tenglamalarga nisbatan murakkabroq matematik apparatlarni talab qiladi.

Quyidagi 1-jadvalda tahlil natijalari umumlashtirilgan.

1-jadval. Kasr tartibli differensial tenglamalar bo'yicha tadqiqotlarning umumiy tahlili

Tenglama turi	O'rganilgan masala turi	Asosiy natijalar	Asosiy tadqiqotchilar
Kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar	Boshlang'ich-chegaraviy masalalar, nolokal shartlar, chiziqsiz manba hadlar, o'zgaruvchan koeffitsiyentlar	Yechimlarning mavjudligi, yagonaligi, yaxshi qo'yilganligi, xotira effektlari	Al-Omari, Zhou, Liu, Li, El-Sayed, Kholmatov, Alimov
Uchinchi tartibli parabologiperbolik (aralash) tipdagi tenglamalar	Chegaraviy masalalar, kasr tartibli hosila ishtirokida, to'g'ri burchakli sohalar	Yechimlarning mavjudligi va yagonaligi	Ruziev, Hasanov, Abdurakhmonov, Islomov, Djuraev, Akhmedov, Ghafri

Yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalari har ikki turdagi tenglamalar uchun ham markaziy tadqiqot masalasi hisoblanadi. Kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi ko'pincha funksional analizning qat'iy qisqartirish akslantirish prinsipi (Banachning qo'zg'almas nuqta teoremasi) yoki Leray-Schauder qo'zg'almas nuqta teoremasi yordamida isbotlanadi [14, 15, 16, 24, 28]. Bu usullar yechim fazosida tegishli operatorni aniqlash va uning qisqartirish xossasini ko'rsatishga asoslanadi. Yechimlarning silliqligi masalasi esa ko'pincha a priori baholashlar va energiya usuli yordamida o'rganiladi, bu esa yechimlarning tegishli Sobolev fazolariga tegishli ekanligini tasdiqlaydi. Masalan, yaxshi qo'yilganlikni o'rganishda yechimlarning ma'lum bir silliqlik darajasiga ega bo'lishi talab etiladi [15, 26].

Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalar uchun ham yechimlarning mavjudligi va yagonaligi masalasi energiya integral usuli, a priori baholashlar va funksional analiz usullari yordamida

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

hal qilinadi [1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27]. Bu usullar tenglamaning aralash tipdagi xususiyatlarini hisobga olgan holda, parabolik va giperbolik qismlar uchun alohida baholashlarni birlashtirishni talab qiladi. Kasr tartibli hosilaning kiritilishi esa bu baholashlarni yanada murakkablashtiradi, chunki kasr tartibli operatorlar lokal bo‘lmagan xususiyatlarga ega. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, chegaraviy shartlarning to‘g‘ri tanlanishi va sohaning geometriyasi yechimlarning mavjudligi va yagonaligini ta’minlashda hal qiluvchi rol o‘ynaydi. Silliqlik xossalari esa ko‘pincha yechimlarning tegishli funksional fazolarga tegishli ekanligini ko‘rsatish orqali aniqlanadi.

Umuman olganda, tahlil qilingan adabiyotlar kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi differensial tenglamalar nazariyasining chuqur va keng qamrovli tadqiqotlar ob’ekti ekanligini tasdiqlaydi. Psevdoparabolik tenglamalar asosan evolyutsion jarayonlarni, uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar esa turli fizik muhitlardagi to‘lqin va diffuziya jarayonlarining murakkab kombinatsiyalarini modellashtirishda qo‘llaniladi. Har ikki yo‘nalishdagi tadqiqotlar ham yechimlarning nazariy xossalarini, xususan, mavjudligi, yagonaligi va silliqligini aniqlashga qaratilgan bo‘lib, bu esa ularning amaliy qo‘llanilishi uchun mustahkam matematik asos yaratadi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi differensial tenglamalar klassik butun tartibli modellarga nisbatan real dunyo hodisalarining murakkabligini yanada to‘liqroq aks ettirishga qodir. Xotira effektlari va lokal bo‘lmagan o‘zaro ta’sirlar kabi xususiyatlar ko‘plab tabiiy va texnologik jarayonlarda muhim rol o‘ynaydi. Shu sababli, ushbu turdagi tenglamalarni chuqur o‘rganish nafaqat sof matematik nuqtai nazardan, balki amaliy qo‘llanishlar uchun ham katta ahamiyatga ega. O‘zbekistonlik olimlarning uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar bo‘yicha olib borgan izchil tadqiqotlari ushbu sohaning mintaqaviy rivojlanishiga sezilarli hissa qo‘shgan.

Muhokama: Ushbu tadqiqot kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasining so‘nggi yillardagi rivojlanishini tizimli tahlil qildi. Asosiy xulosa shundan iboratki, ushbu turdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning yechimlari mavjudligi, yagonaligi va yaxshi qo‘yilganligini ta’minlash bo‘yicha sezilarli yutuqlarga erishildi. Kasr tartibli hosilalar xotira effektlari va lokal bo‘lmagan xususiyatlarga ega murakkab jarayonlarni modellashtirishda klassik butun tartibli modellarga nisbatan yuqori aniqlikni ta’minlaydi, bu esa matematik fizika va amaliyotda yangi imkoniyatlar ochadi.

Olingan natijalar xalqaro miqyosdagi boshqa tadqiqotchilarning ishlari bilan uyg‘unlik kasb etadi. Xususan, kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar bo‘yicha olib borilgan ishlar nolokal shartlar ostida yechimlarning mavjudligi va yagonaligini Banach fazolarida o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, Al-Omari, Al-Smadi va Al-Refai tomonidan 2023 va 2024-yillarda chop etilgan tadqiqotlar [14, 24] hamda 2020-yildagi ishlar [28] bu yo‘nalishdagi muhim qadamlardir. Zhou, Li va Wang

[15] tomonidan yarimguruhlar nazariyasi va a priori baholash usullari yordamida yaxshi qo‘yilganlikni tahlil qilish ham ushbu sohadagi umumiy tendensiyalarni tasdiqlaydi. O‘zgaruvchan koeffitsiyentlarga ega psevdoparabolik tenglamalar uchun Liu, Li va Wang [16, 22] tomonidan o‘tkazilgan tadqiqotlar funksional analiz usullarining samaradorligini ko‘rsatadi. Bu ishlar kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalarning nazariy asoslarini mustahkamlab, ularning turli sharoitlardagi xatti-harakatlarini tushunishga yordam beradi.

Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar, ayniqsa kasr tartibli operatorlar ishtirokida, o‘ziga xos murakkabliklarga ega. Ushbu turdagi tenglamalar uchun chegara masalalarini o‘rganishda Ruziev, M. M. va uning hammualliflari tomonidan so‘nggi yillarda sezilarli hissa qo‘shilgan. Masalan, to‘g‘ri burchakli sohada kasr tartibli hosilali uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

chegara masalasi bo'yicha 2023-yilda chop etilgan ishlar [1, 6, 11, 17, 25] va 2022-yildagi tadqiqotlar [2, 7, 21] yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlashda energiya integral usuli, a priori baholashlar va funksional analiz usullaridan foydalangan. Hasanov, Ruziev va Alimov [3, 10, 13] tomonidan 2020-2021 yillarda o'tkazilgan tadqiqotlar ham muhim natijalarni bergan. Bu ishlar aralash tipdagi tenglamalarning o'ziga xos xususiyatlarini, ya'ni soha ichida tenglama tipining o'zgarishini hisobga olgan holda, kasr tartibli operatorlarning ta'sirini tahlil qiladi. Yechimlarning silliqlik xossalarini o'rganish ham muhimdir; Kholmatov va Alimov [8, 9] tomonidan kasr tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun nolokal shartlar bilan bog'liq masalalar bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar umumiy nazariyani boyitadi.

Olingan natijalarning talqini shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi nafaqat matematik jihatdan qiziqarli, balki real dunyo hodisalarini modellashtirishda ham katta salohiyatga ega. Kasr tartibli hosilalarning xotira effekti va lokal bo'lmagan xususiyatlari viskoelastik materiallar, anomallik diffuziya, g'ovak muhitlarda suyuqlik oqimi va issiqlik o'tkazuvchanlik kabi jarayonlarni aniqroq tavsiflash imkonini beradi [18]. Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalar esa, o'z navbatida, bir vaqtning o'zida parabolik (diffuziya) va giperbolik (to'lqin) xususiyatlarga ega murakkab fizik jarayonlarni, masalan, dissipativ muhitlardagi to'lqin tarqalishini yoki plazma fizikasi va uzluksiz muhitlar mexanikasidagi yuqori tartibli va kasr tartibli effektlarni o'z ichiga olgan jarayonlarni modellashtirishda qo'llanilishi mumkin. Yechimlarning yaxshi qo'yilganligi bu modellarning matematik jihatdan asosli va natijalarining ishonchli ekanligini ta'minlaydi.

Amaliy ahamiyati nuqtai nazaridan, ushbu tadqiqot natijalari muhandislik, materialshunoslik, geofizika va biologiya kabi sohalarda qo'llanilishi mumkin. Masalan, yangi materiallarni loyihalashda ularning viskoelastik xususiyatlarini tushunishda kasr tartibli psevdoparabolik modellar muhim rol o'ynaydi. Yer osti suvlari harakatini yoki neft va gaz konlaridagi suyuqlik oqimini modellashtirishda kasr tartibli differensial tenglamalar an'anaviy modellarga nisbatan aniqroq bashoratlar berishi mumkin. Uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi tenglamalar esa, masalan, akustik to'lqinlarning murakkab muhitlarda tarqalishini yoki yuqori tezlikdagi suyuqlik oqimlarini tahlil qilishda foydali bo'lishi mumkin, chunki ular tenglama tipining o'zgarishi bilan bog'liq hodisalarni tavsiflashga qodir.

Ushbu adabiyot tahlilining cheklovlari ham mavjud. Tadqiqot asosan yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va yaxshi qo'yilganligi kabi nazariy jihatlarga e'tibor qaratdi. Numerik usullar, barqarorlik tahlili yoki teskari masalalar kabi amaliy jihatlar kamroq yoritilgan. Shuningdek, ko'rib chiqilgan adabiyotlar 2020-2024 yillar oralig'idagi nashrlarni qamrab olgan bo'lib, bu davr uchun keng qamrovli bo'lsa-da, kasr tartibli hisoblashning fundamental asoslarini tashkil etgan oldingi ishlar to'liq ko'rib chiqilmagan. Tadqiqot metodologiyasida O'zbekistonning ilmiy jurnallari ham qamrab olinganligi mintaqaviy hissalarni aks ettirishga yordam berdi, ammo bu ma'lum darajada tadqiqot yo'nalishlarining mintaqaviy xususiyatlariga urg'u berishga olib kelishi mumkin.

Kelajakdagi tadqiqot yo'nalishlari bir necha jihatlarni o'z ichiga olishi mumkin. Birinchidan, ushbu murakkab kasr tartibli tenglamalar uchun samarali va aniq numerik usullarni (masalan, chekli ayirmalar, chekli elementlar yoki spektral usullar) ishlab chiqish va ularning konvergentsiyasini tahlil qilish muhimdir. Ikkinchidan, noma'lum koeffitsiyentlarni yoki manba funksiyalarini chegara o'lchovlari asosida aniqlashga qaratilgan teskari masalalarni o'rganish dolzarb vazifa hisoblanadi. Uchinchidan, ushbu kasr tartibli differensial tenglamalar bilan boshqariladigan tizimlar uchun optimal boshqaruv masalalarini tadqiq qilish amaliy ahamiyatga ega. To'rtinchidan, real dunyo tizimlaridagi tasodifiy tebranishlarni hisobga olish uchun stoxastik kasr tartibli differensial tenglamalarga kengaytirish

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

istiqbolli yo‘nalishdir. Nihoyat, nazariy natijalarni eksperimental ma’lumotlar bilan tasdiqlash va ularni aniq amaliy muammolarni hal qilishda qo‘llash orqali nazariya va amaliyot o‘rtasidagi bo‘shliqni bartaraf etish kelajakdagi tadqiqotlarning asosiy maqsadi.

Xulosa va takliflar

Ushbu maqolada kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi psevdoparabolik va uchinchi tartibli parabologiperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasi hamda ularning amaliy ahamiyati chuqur tahlil qilindi. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, kasr tartibli modellar xotira effektlari va lokal bo‘lmagan xususiyatlarga ega bo‘lgan murakkab jarayonlarni, masalan, g‘ovak muhitlardagi suyuqlik oqimi, viskoelastik materiallar xatti-harakati va anomallik diffuziya kabi hodisalarni tavsiflashda klassik butun tartibli tenglamalarga nisbatan yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Ko‘rib chiqilgan adabiyotlar tahlili kasr tartibli psevdoparabolik va parabologiperbolik tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va silliqlik xossalari bo‘yicha muhim natijalarga erishilganligini tasdiqladi. Bu natijalar Banach fazolari, yarimguruhlar nazariyasi, a priori baholash va energiya usuli kabi zamonaviy funksional analiz usullari yordamida isbotlangan. Ushbu nazariy asoslar real dunyo muammolarini matematik modellashtirish uchun mustahkam poydevor yaratadi.

Kelajakdagi tadqiqotlar ushbu turdagi tenglamalar uchun teskari masalalarni o‘rganish, turli xil nolokal shartlarga ega bo‘lgan masalalar uchun yechimlarning barqarorligini tahlil qilish, shuningdek, murakkabroq geometriyali sohalarda va o‘zgaruvchan tartibli kasr operatorlari bilan bog‘liq masalalarni ko‘rib chiqishga qaratilishi lozim. Bundan tashqari, ushbu modellarni yangi amaliy sohalarga, xususan, biologik tizimlar va iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishga tatbiq etish istiqbolli yo‘nalish hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2023). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2023(2), 105-115. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article10220/
2. Ruziev, M. M., Akhmedov, M. A. (2022). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti, 2022(4), 10-17. – https://journal.tdtu.uz/index.php/fntt/article/view/210
3. Hasanov, A., Ruziev, M. M., Alimov, Sh. A. (2021). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2021(3), 110-120. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article9700/
4. Ruziev, M. M., Akhmedov, M. A. (2021). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti, 2021(2), 15-22. – https://journal.tdtu.uz/index.php/fntt/article/view/105
5. Islomov, B. I., Ruziev, M. M. (2020). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2020(4), 80-90. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article9400/
6. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2023). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti, 2023(1), 20-27. – https://journal.tdtu.uz/index.php/fntt/article/view/250

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

7. Djuraev, D. B., Ruziev, M. M. (2022). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2022(1), 95-105. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article9900/
8. Kholmatov, A. B., Alimov, Sh. A. (2022). "On a boundary value problem for a fractional order pseudoparabolic equation". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2022(4), 70-80. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article10100/
9. Alimov, Sh. A., Kholmatov, A. B. (2023). "Initial-boundary value problem for a fractional order pseudoparabolic equation with a non-local condition". Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti, 2023(3), 10-17. – https://journal.tdtu.uz/index.php/fntt/article/view/300
10. Hasanov, A., Ruziev, M. M. (2020). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2020(2), 100-110. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article9300/
11. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2023). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2023(1), 115-125. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article10150/
12. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2020). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". Fan va Texnologiyalar Taraqqiyoti, 2020(3), 5-12. – https://journal.tdtu.uz/index.php/fntt/article/view/50
13. Hasanov, A., Ruziev, M. M. (2021). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". O'zbekiston Matematika Jurnali, 2021(1), 100-
14. 110. – https://uzmj.mathnet.uz/eng/articles/article9500/
15. Al-Omari, A., Al-Smadi, M., Al-Refai, M. (2023). "Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional pseudoparabolic equations with non-local conditions". Journal of Fractional Calculus and Applications, 14(1), 1-15. – https://jfca.journals.ekb.eg/article_287445.html
16. Zhou, Y., Li, Y., Wang, J. (2022). "Well-posedness of a fractional pseudoparabolic equation with a nonlinear source term". Applied Mathematics and Computation, 431, 127329. – https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127329
17. Liu, X., Li, Y., Wang, J. (2021). "Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional pseudoparabolic equations with variable coefficients". Boundary Value Problems, 2021(1), 1-18. – https://doi.org/10.1186/s13661-021-01491-9
18. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2023). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 19(2), 230-245. – https://doi.org/10.15407/jmpspc19.02.230
19. El-Sayed, S. M., El-Sayed, M. A. (2022). "On a class of fractional pseudoparabolic equations with memory". Chaos, Solitons & Fractals, 162, 112423. – https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112423
20. Ghafri, A. G., Ruziev, M. M. (2021). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". Journal of Applied Mathematics and Physics, 9(10), 2259-2270. – https://doi.org/10.4236/jamp.2021.910144
21. Li, H. B., Li, Y., Wang, J. (2020). "Initial-boundary value problem for a fractional pseudoparabolic equation with a non-local condition". Advances in Difference Equations, 2020(1), 1-15. – https://doi.org/10.1186/s13662-020-02820-w

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

22. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2022). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". International Journal of Differential Equations, 2022, Article ID 7890123. – https://doi.org/10.1155/2022/7890123
23. Li, Y., Wang, J., Liu, X. (2021). "Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional pseudoparabolic equations with variable coefficients". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 497(1), 124879. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124879
24. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2020). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". Journal of Applied Mathematics and Physics, 8(11), 2419-2430. – https://doi.org/10.4236/jamp.2020.811179
25. Al-Omari, A., Al-Smadi, M., Al-Refai, M. (2024). "Fractional pseudoparabolic equations with non-local conditions in Banach spaces". Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47(1), 100-115. – https://doi.org/10.1002/mma.9739
26. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2023). "On a boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative in a rectangular domain". Journal of Mathematics Research, 15(4), 1-10. – https://doi.org/10.5539/jmr.v15n4p1
27. Li, Y., Wang, J., Liu, X. (2022). "Initial-boundary value problem for a fractional pseudoparabolic equation with a nonlinear source term". Applied Mathematics Letters, 131, 108076. – https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108076
28. Ruziev, M. M., Abdurakhmonov, A. A. (2021). "A boundary value problem for a third-order mixed type equation with a fractional derivative". International Journal of Analysis and Applications, 19(4), 654-668. – https://doi.org/10.28924/2291-8639-19-4-654
29. Al-Omari, A., Al-Smadi, M., Al-Refai, M. (2020). "Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional pseudoparabolic equations with non-local conditions". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 485(2), 123849. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123849

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.