BESSEL FUNKSIYASI DARAJALI QATORINING QISQARTIRISH VA YAXLITLASH XATOLIKLARINI BAHOLASH

Rayimov Doniyor G'afurovich
PhD, dotsent Osiyo xalqaro universiteti, Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar kafedrasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.23468016

Kalit so'zlar: Bessel funksiyasi, Frobenius qatori, qoldiq had, yaxlitlash xatoligi, shartlilik soni.

Bessel funksiyalari silindrik geometriyali masalalarni yechishda asosiy vosita bo'lib, ularni hisoblashning eng tabiiy usuli $x=0$ regulyar maxsus nuqta atrofidagi Frobenius qatoridir [1, 2]:

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty} t_m(x), \qquad t_m(x)=\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}. \qquad (1)$$

Qator barcha x larda yaqinlashadi, biroq amaliyotda ikki savol ochiq qoladi: nechta had olinganda berilgan aniqlik kafolatlanadi va chekli aniqlikdagi arifmetikada qator qanchalik ishonchli. Ushbu tezisda shu ikki savolga miqdoriy javob beriladi.

Qisqartirish xatoligi. Qo'shni hadlar nisbati

$$\rho_m(x)=\left|\frac{t_{m+1}}{t_m}\right|=\frac{x^2}{4(m+1)(m+\nu+1)}$$

m bo'yicha monoton kamayadi. $S_N=\sum_{m=0}^{N-1} t_m$ va $R_N=J_\nu-S_N$ belgilashlarni kiritamiz. Agar $q_N=\rho_N(x)<1$ bo'lsa, haqiqiy $x>0$ uchun hadlar ishorasining almashinuvi va Leybnits teoremasidan ikki tomonlama baho kelib chiqadi:

$$(1-q_N)|t_N(x)|\le|R_N(x)|\le|t_N(x)|. \qquad (2)$$

Kompleks x uchun esa geometrik majoranta $|R_N|\le|t_N|/(1-q_N)$ bahoni beradi. (2) dan ko'rinadiki, birinchi tashlab yuborilgan had xatolikni deyarli aniq ifodalaydi. Bundan tashqari, qisman yig'indi uchun $L[S_N]=x^2 t_{N-1}(x)$ ayniyat o'rinli, bu yerda $L[y]=x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y$.

Yaxlitlash xatoligi. Hadlar modullarining yig'indisi modifikatsiyalangan Bessel funksiyasiga teng: $\sum_m |t_m(x)|=I_\nu(x)$. Shu sababli ikkilangan aniqlikda ($u\approx 1{,}1\cdot 10^{-16}$) yig'ishdagi xatolik u $I_\nu(x)$ tartibida bo'ladi, nisbiy xatolik esa

$$\kappa_\nu(x)=\frac{I_\nu(x)}{|J_\nu(x)|} \qquad (3)$$

shartlilik soniga proporsional. Katta x da $\log_{10}\kappa_\nu(x)\approx 0{,}43\,x$, ya'ni har bir birlik argument taxminan 0,43 o'nli raqamni yo'qotadi.

Sonli natijalar. $\varepsilon=10^{-10}$ aniqlik uchun hisoblashlar mpmath kutubxonasida 40 xonali arifmetikada tekshirildi. $\nu=0$ da zarur hadlar soni $x=1$ da 7 ta, $x=10$ da 21 ta, $x=20$ da 35 ta bo'ldi; barcha holatlarda $|t_N|/|R_N|\le 1{,}08$. $\nu=1$, $x=20$ holida esa ikkilangan aniqlikdagi haqiqiy xatolik $1{,}4\cdot 10^{-9}$ ga yetdi, bu qisqartirish xatoligidan 58 marta katta va $\kappa_1(20)\approx 6{,}4\cdot 10^{8}$ bilan to'liq tushuntiriladi.

Xulosa. (2) va (3) baholar asosida amaliy qoida tavsiya etiladi: hadlar $|t_m|\le\varepsilon$ va $\rho_m<1$ bo'lguncha yig'iladi, bir vaqtda $A=\sum|t_m|$ to'planadi; agar u $A>\varepsilon$ bo'lsa, asimptotik formula yoki yuqori aniqlikdagi arifmetikaga o'tiladi. Ikkilangan aniqlikda darajali qatordan $x\lesssim 15$ oraliqda foydalanish maqsadga muvofiq.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Adabiyotlar

1. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1944.
2. Olver F. W. J. et al. (eds.). NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
3. Higham N. J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2002.
4. Johansson F. et al. mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic, version 1.3.0. 2023. URL: https://mpmath.org

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.