ANIQ INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI

Iminova Shaxloxon Ixvoljon qizi

Annotatsiya. Ushbu tezisda matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo‘lgan aniq integral, uning ta’rifi, asosiy xossalari va hisoblash usullari yoritilgan. Aniq integralning geometrik va fizik mazmuni, egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni, o‘zgaruvchan kuch bajargan ishni, jism bosib o‘tgan yo‘lni hamda hajmlarni hisoblashdagi tatbiqlari ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, aniq integralni hisoblashga oid misollar keltirilib, uning nazariy va amaliy ahamiyati asoslangan.

Kalit so‘zlar: aniq integral, integral yig‘indi, boshlang‘ich funksiya, Nyuton–Leybnits formulasi, integrallash, yuza, hajm, fizik tatbiqlar, matematik analiz.

KIRISH

Matematik analiz fanida aniq integral muhim o‘rin egallaydi. U uzluksiz yoki ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar yordamida ifodalangan miqdorlarni hisoblash imkonini beradi. Aniq integral tushunchasi matematikaning rivojlanishi jarayonida yuzalarni, hajmlarni va turli fizik kattaliklarni aniqlash ehtiyojidan kelib chiqqan.

Ko‘plab amaliy masalalarda o‘zgaruvchi kattaliklarning umumiy qiymatini topish talab etiladi. Masalan, jismning o‘zgaruvchan tezligi ma’lum bo‘lsa, bosib o‘tilgan yo‘lni, o‘zgaruvchan kuch ta’sirida bajarilgan ishni yoki egri chiziq bilan chegaralangan shakl yuzasini hisoblash mumkin. Bunday masalalarni yechishda aniq integral asosiy matematik vositalardan biri hisoblanadi.

Aniq integral differensial hisob bilan uzviy bog‘liq. Agar differensial hisob funksiyaning o‘zgarish tezligini aniqlashga xizmat qilsa, integral hisob kichik o‘zgarishlarni umumlashtirish va yig‘ish imkonini beradi. Shu sababli aniq integral fizika, mexanika, iqtisodiyot, muhandislik va boshqa ko‘plab fanlarda keng qo‘llaniladi.

Mazkur tezisning maqsadi aniq integralning matematik mazmunini ochib berish, uning asosiy xossalari va hisoblash usullarini bayon qilish hamda turli sohalardagi tatbiqlarini misollar orqali tushuntirishdan iborat.

Aniq integral tushunchasi va uning ta’rifi

Faraz qilaylik, (f(x)) funksiya ([a,b]) kesmada aniqlangan bo‘lsin. Ushbu kesmani

[a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b]

nuqtalar yordamida (n) ta kichik kesmaga ajratamiz. Har bir kesmaning uzunligi quyidagicha aniqlanadi:

[\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.]

Har bir kichik kesmadan (\xi_i) nuqtani tanlab, quyidagi integral yig‘indini tuzamiz:

[S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.]

Bu yig‘indi funksiya qiymatlari bilan tegishli kesmalar uzunliklari ko‘paytmalarining yig‘indisidan iborat. Kesmalarning eng katta uzunligi nolga intilganda integral yig‘indining limiti mavjud bo‘lib, u tanlangan nuqtalarning tanlanish usuliga bog‘liq bo‘lmasa, ushbu limit funksiyaning aniq integrali deyiladi.

Aniq integral quyidagicha belgilanadi:

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

[\boxed{\int_a^b f(x),dx}.]

Demak,

lim_{\max\Delta x_i\to0} \sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.

Bu yerda (a) va (b) integrallashning quyi va yuqori chegaralari, (f(x)) integral ostidagi funksiya, (dx) esa integrallash o'zgaruvchisini bildiradi.

Agar funksiya ([a,b]) kesmada uzluksiz bo'lsa, uning aniq integrali mavjud bo'ladi. Aniq integralning qiymati funksiya grafigi bilan (Ox) o'qi orasidagi yuzaga bog'liq. Agar funksiya kesmada musbat bo'lsa, integral shu grafik bilan chegaralangan sohaning yuzasini ifodalaydi. Funksiya manfiy qiymatlar qabul qilganda esa aniq integral ishorali yuza sifatida qaraladi.

Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral bir qator muhim xossalarga ega bo'lib, ular integralni hisoblashni soddalashtiradi.

Chegaralari teng bo'lgan integral nolga teng:

[\int_a^a f(x),dx=0.]

Integrallash chegaralarini almashtirishda integral ishorasi o'zgaradi:

-\int_b^a f(x),dx.]

Integralning oraliqlar bo'yicha additivligi:

Agar (a<c<b) bo'lsa, u holda

\int_a^c f(x),dx+\int_c^b f(x),dx.]

O'zgarmas ko'paytuvchini integral tashqarisiga chiqarish mumkin:

k\int_a^b f(x),dx.]

5. Yig'indining integrali integrallar yig'indisiga teng:

\int_a^b f(x),dx+\int_a^b g(x),dx.]

6. Integralning monotonlik xossasi:

Agar ([a,b]) kesmada (f(x)\leq g(x)) bo'lsa, u holda

[\int_a^b f(x),dx\leq\int_a^b g(x),dx.]

Ushbu xossalar integral ifodalarni soddalashtirish, murakkab integrallarni qismlarga ajratish va hisoblash natijalarini tekshirishda muhim ahamiyatga ega.

3. Aniq integralni hisoblash usullari

Aniq integralni hisoblashning asosiy usullaridan biri Nyuton–Leybnits formulasidir. Agar (F(x)) funksiya (f(x)) ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ya'ni

[F'(x)=f(x),]

u holda

[\boxed{\int_a^b f(x),dx=F(b)-F(a)}.]

Mazkur formula aniq integralni hisoblashni boshlang'ich funksiyani topish va uning yuqori hamda quyi chegaralardagi qiymatlari ayirmasini aniqlashga keltiradi.

1-misol. Quyidagi integralni hisoblaymiz:

[\int_0^2 (3x^2+2x),dx.]

Integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi:

[F(x)=x^3+x^2.]

Nyuton–Leybnits formulasiga ko'ra:

[\begin{aligned}
\int_0^2(3x^2+2x),dx &=[x^3+x^2]_0^2\ &=(8+4)-(0+0)\&=12. \end{aligned}]

Demak, integralning qiymati 12 ga teng.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Aniq integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirish usuli ham keng qo‘llaniladi. Agar integral ostidagi ifodada murakkab funksiya qatnashsa, yangi o‘zgaruvchi kiritish orqali integral soddalashtiriladi.

Bundan tashqari, bo‘laklab integrallash usuli quyidagi formula yordamida bajariladi:

[uv]_a^b-\int_a^b v,du.]

Bu usul ko‘paytma ko‘rinishidagi funksiyalar integrallarini hisoblashda qulaydir.

Aniq integralning geometrik tatbiqlari

Aniq integralning eng muhim tatbiqlaridan biri tekis shakllarning yuzasini hisoblashdir.

Agar (f(x)\geq0) bo‘lib, funksiya grafigi, (Ox) o‘qi hamda (x=a) va (x=b) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan soha qaralsa, uning yuzasi quyidagicha aniqlanadi:

[S=\int_a^b f(x),dx.]

Agar soha ikki funksiya grafigi bilan chegaralangan bo‘lsa va (f(x)\geq g(x)) sharti bajarilsa, yuza:

[S=\int_a^b[f(x)-g(x)],dx]

formula yordamida topiladi.

2-misol. (y=x^2) parabola, (Ox) o‘qi va (x=0), (x=2) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblaymiz.

Funksiya ushbu kesmada manfiy bo‘lmagani uchun:

[S=\int_0^2x^2,dx.]

Integralni hisoblaymiz:

[S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac83.]

Demak, izlanayotgan sohaning yuzasi (\frac83) kvadrat birlikka teng.

Aylanish jismlarining hajmini hisoblashda ham aniq integral muhim o‘rin tutadi. Agar (y=f(x)) funksiya grafigi ([a,b]) kesmada (Ox) o‘qi atrofida aylantirilsa, hosil bo‘lgan jismning hajmi quyidagicha topiladi:

[V=\pi\int_a^b[f(x)]^2,dx.]

Ushbu formula turli geometrik jismlarning hajmlarini hisoblashda, xususan, muhandislik va texnik loyihalashda qo‘llaniladi.

Iqtisodiyotdagi tatbiqlar. Aniq integral iqtisodiy ko‘rsatkichlarni umumlashtirishda ham ishlatiladi. Masalan, chegaraviy xarajat (C'(x)) ishlab chiqarish hajmining o‘zgarishiga bog‘liq bo‘lsa, ishlab chiqarish hajmini (a) dan (b) gacha oshirish bilan bog‘liq qo‘shimcha xarajat:

[C(b)-C(a)=\int_a^b C'(x),dx]

tenglik orqali topiladi. Bu yerda (C(x)) umumiy xarajat funksiyasini anglatadi.

Shuningdek, aniq integral elektr zaryadi, suyuqlik bosimi, massa taqsimoti va boshqa o‘zgaruvchan fizik kattaliklarni hisoblashda ham qo‘llaniladi.

XULOSA

Aniq integral matematik analizning fundamental tushunchalaridan biri bo‘lib, o‘zgaruvchan miqdorlarning umumiy qiymatini aniqlash imkonini beradi. Uning nazariy asosi integral yig‘indi va limit tushunchalariga tayanadi. Nyuton–Leybnits formulasi esa aniq integralni hisoblashning asosiy va qulay usullaridan biri hisoblanadi.

Aniq integral yordamida egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzalar, aylanish jismlarining hajmlari, o‘zgaruvchan tezlik orqali bosib o‘tilgan yo‘l va o‘zgaruvchan kuch bajargan ish kabi kattaliklar aniqlanadi. Iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda ham integral usullaridan samarali foydalaniladi.

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Xulosa qilib aytganda, aniq integralning nazariy xossalarini o‘rganish va uni amaliy masalalarda qo‘llash matematik tafakkurni rivojlantiradi, hisoblash ko‘nikmalarini mustahkamlaydi hamda turli fanlar o‘rtasidagi matematik bog‘lanishlarni chuqur anglashga yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. Matematik analiz bo‘yicha o‘quv adabiyoti.
2. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.
3. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J. Thomas’ Calculus. Pearson.
4. OpenStax. Calculus, Volume 1. Aniq integral va uning tatbiqlariga oid bo‘limlar. https://openstax.org/books/calculus-volume-1
5. Oliy ta’lim muassasalari uchun matematik analiz fanidan o‘quv qo‘llanmalar

© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.