# QOVUSHQOQ-ELASTIK TOG' JINSIDAGI KOMPOZIT ANKERDA BURALISH TO'LQINLARI: NOMUKAMMAL KONTAKTNING TA'SIRI

**Ismatova Kamola Otabek qizi**
Osiyo Xalqaro Universiteti "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrasi
E-mail: kamolaismatova2628@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.23139294

**Annotatsiya.** Qovushqoq-elastik tog' jinsiga o'rnatilgan kompozit anker modeli — cheksiz muhitdagi sterjenda buralish to'lqinlariga nomukammal kontaktning ta'siri o'rganilgan. Muhit Rjanitsin–Koltunov yadroli irsiy operator, kontakt prujinali model bilan ifodalangan. Dispersion tenglama yopiq ko'rinishda olingan. Kuchsiz kontakt uchun kompleks chastotaning yopiq asimptotikasi olingan: chastota kvadratining siljishi kontakt bikrligiga chiziqli, so'nish esa uning kvadratiga proporsional. Shisha-plastik anker–granit tizimida kontakt kuchsizlanganda fazoviy so'nish 27 dB/m dan 0,6 dB/m gacha kamayishi ko'rsatilgan va bu bog'lanish sifatining miqdoriy mezoni sifatida taklif etilgan.

**Kalit so'zlar:** buralish to'lqini, kompozit anker, irsiy yadro, nomukammal kontakt, asimptotika, so'nish.

Kirish

Shisha- va bazalt-plastik ankerlar korroziyaga chidamliligi tufayli tunnel va shaxtalarni mustahkamlashda tobora keng qo'llanilmoqda. Ularning ishonchliligi jins bilan bog'lanish sifatiga bog'liq, bu bog'lanish esa qatlamlanish, g'ovaklik va qorishmaning chala qotishi tufayli ko'pincha nomukammal bo'ladi. Bunday nazoratda yo'naltirilgan ultratovush to'lqinlari [1, 4], xususan faqat siljish deformatsiyasi bilan bog'liq buralish modasi [2] qulay. Po'lat ankerdan farqli ravishda, kompozit sterjenda siljish to'lqini tezligi (~1,5 km/s) qattiq jinsdagidan (~3 km/s) kichik, shuning uchun buralish modasi muhitga nurlanmaydi va uning so'nishi faqat muhit qovushqoqligi bilan aniqlanadi — bu kontaktni so'nish orqali baholash uchun qulay.

Botirilgan to'lqin o'tkazgichlardagi kanallangan va nurlanuvchi modalar [3], gruntdagi quvurlarda buralish to'lqini so'nishi [2] o'rganilgan. Prujinali kontakt modeli botirilgan sterjendagi bo'ylama [5] va kompozit silindrdagi buralish [6] to'lqinlari uchun qo'llanilgan, biroq materiallar elastik deb qaralgan. Irsiy qovushqoq-elastiklik nazariyasi [7, 8] da bayon etilgan, Rjanitsin–Koltunov yadroli muhitdagi silindrik jismlar dinamikasi [9–12] da tadqiq qilingan. Irsiy muhit va nomukammal kontaktning birgalikdagi ta'siri, xususan so'nishning kontakt bikrligiga oshkor bog'liqligi o'rganilmagan.

**Tadqiqot maqsadi** — kompozit anker modelida buralish to'lqinlari uchun nomukammal kontaktni hisobga oluvchi dispersion tenglamani olish, kuchsiz kontakt uchun kompleks chastotaning yopiq asimptotikasini topish va kontakt holatini baholashning miqdoriy mezonlarini asoslash.

Masalaning qo'yilishi

Radiusi R bo'lgan elastik sterjen (siljish moduli $\mu_1$, zichligi $\rho_1$) cheksiz qovushqoq-elastik muhitga botirilgan, sterjen o'qi Oz o'qi bilan ustma-ust tushadi. Muhitning zichligi $\rho$, oniy siljish moduli $\mu_0$. Muhit uchun holat tenglamasi Boltsman–Volterra ko'rinishida olinadi:

$$\sigma_{r\theta}=\tilde{\mu}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \tilde{\mu}f(t)=\mu_0\left[f(t)-\int_{-\infty}^{t} Q\,(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\right],$$



© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

bu yerda relaksatsiya yadrosi sifatida Rjanitsin–Koltunov yadrosi [8–12] olinadi:

$$Q(t)=A\,e^{-\beta t}\,t^{\alpha-1},\qquad 0<\alpha<1,\quad A>0,\quad \beta>0.$$

Garmonik buralish to'lqini $u_\theta=U(r)\exp\big(i(kz-\omega t)\big)$ ko'rinishida izlanadi. U holda irsiy operator kompleks modul bilan almashtiriladi:

$$\tilde{\mu}(\omega)=\mu_0\left[1-\frac{A\,\Gamma(\alpha)}{(\beta-i\omega)^{\alpha}}\right].$$

Bu ifoda $\mathrm{Im}\,\omega>-\beta$ sohada integral ko'rinishga mos keladi va $\omega=-i\beta$ nuqtadan pastga yo'nalgan qirqimdan tashqari butun kompleks tekislikka analitik davom ettiriladi.

Sterjen va muhit orasidagi kontakt prujinali model [5, 6] bilan ifodalanadi: $r=R$ da

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}=\sigma_{r\theta}^{(2)},\qquad \sigma_{r\theta}^{(2)}=k_t\left(u_\theta^{(2)}-u_\theta^{(1)}\right),$$

bu yerda $k_t$ — kontaktning urinma bikrligi (Pa/m). $k_t\to\infty$ mukammal kontaktga, $k_t\to 0$ esa to'liq sirpanishga mos keladi. $r\to\infty$ da muhitdagi maydon so'nadi.

Dispersion tenglama

Har ikki sohada $U(r)$ birinchi tartibli Bessel tenglamasini (muhitda — modifikatsiyalangan) qanoatlantiradi. Sterjen ichidagi regulyar va muhitdagi so'nuvchi yechimlar quyidagicha:

$$U_1=a\,J_1(q_1 r),\qquad U_2=b\,K_1(sr),\qquad q_1^2=\frac{\rho_1\omega^2}{\mu_1}-k^2,\qquad s^2=k^2-\frac{\rho\,\omega^2}{\tilde{\mu}(\omega)},\quad \mathrm{Re}\,s>0,$$

bu yerda $J_n$ — Bessel, $K_n$ — Makdonald funksiyalari. Mos urinma kuchlanishlar $\sigma_{r\theta}^{(1)}=-\mu_1 a\,q_1 J_2(q_1 r)$ va $\sigma_{r\theta}^{(2)}=-\tilde{\mu}\,b\,s\,K_2(sr)$ ko'rinishda bo'ladi. Ularni kontakt shartlariga qo'yib va $a$, $b$ koeffitsiyentlarni chiqarib tashlab, o'lchamsiz dispersion tenglama olinadi:

$$F(\Omega,\kappa)\equiv\frac{\bar{\mu}_1\,J_2(x)\,K_1(z)}{\bar{\mu}(\Omega)\,z\,K_2(z)}-\frac{J_1(x)}{x}+\frac{\bar{\mu}_1}{K}\,J_2(x)=0.$$

Bu yerda $\Omega=\omega R/c_s$, $\kappa=kR$, $x=q_1R$, $z=sR$, $\bar{\mu}_1=\mu_1/\mu_0$, $\bar{\mu}=\tilde{\mu}/\mu_0$, $c_s=\sqrt{\mu_0/\rho}$ — muhitdagi siljish to'lqinining oniy tezligi, $K=k_tR/\mu_0$ — o'lchamsiz kontakt bikrligi. $J_1(x)/x$ va $J_2(x)$ funksiyalar $x^2$ ning butun funksiyalari bo'lgani uchun $F$ ning tarmoqlanish nuqtalari faqat $z=0$ va $\omega=-i\beta$ shartlar bilan bog'liq.

$K\to\infty$ da tenglama mukammal kontakt tenglamasiga o'tadi. **Kuchsiz kontakt asimptotikasi.** $K\ll\bar{\mu}_1$ da muhitning kompleks yumshoqligi $G(\Omega)=K_1(z)/\big(\bar{\mu}\,z\,K_2(z)\big)$ qatnashgan birinchi had $1/K$ li hadga nisbatan kichik. Nolinchi yaqinlashishda qo'zg'almas prujinali asosdagi sterjen tenglamasi, birinchi tartibli tuzatma esa yopiq ko'rinishda olinadi:

$$\frac{\bar{\mu}_1 J_2(x_0)}{K}=\frac{J_1(x_0)}{x_0},\qquad \Omega_0=\frac{c_{s1}}{c_s}\sqrt{\kappa^2+x_0^2},\qquad \Omega\approx\Omega_0-C\,G(\Omega_0),$$

$$C=\frac{c_{s1}^2}{c_s^2}\,\frac{\bar{\mu}_1 x_0 J_2(x_0)}{\Omega_0\,D},\qquad D=\frac{\bar{\mu}_1 J_2'(x_0)}{K}+\frac{J_2(x_0)}{x_0}.$$

$C>0$ bo'lgani uchun so'nish $-\mathrm{Im}\,\Omega\approx C\,\mathrm{Im}\,G$ muhitdagi yo'qotishlar bilan bevosita bog'lanadi; elastik muhitda $G$ haqiqiy va so'nish yo'q. $x_0\ll 1$ da $x_0^2\approx 4K/\bar{\mu}_1$ bo'lib, o'lchamli ko'rinishda quyidagi sodda formulalar kelib chiqadi:

$$\omega^2\approx c_{s1}^2k^2+\frac{4k_t}{\rho_1 R},\qquad -\mathrm{Im}\,\Omega\approx\frac{2\rho}{\rho_1}\,\frac{K^2}{\Omega_0}\,\mathrm{Im}\,G(\Omega_0).$$



© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

Demak, chastota kvadratining siljishi kontakt bikrligiga chiziqli, so'nish esa $K\to 0$ da uning kvadratiga proporsional. Fizik ma'nosi: sterjen kesimi prujinali asosdagi qattiq disk kabi buraladi, muhitga uzatiladigan kuchlanish K ga, undagi dissipatsiya esa $K^2$ ga mutanosib.

Elastik holatda moda $\Omega=\kappa$ chiziqda kesiladi. Bu nuqtada $z\to 0$ va $zK_2(z)/K_1(z)\to 2$ bo'lgani uchun kesilish to'lqin sonlari quyidagi tenglamadan topiladi:

$$\bar{\mu}_1 J_2(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{K}\right)=\frac{J_1(x)}{x},\qquad x=\kappa\sqrt{c_s^2/c_{s1}^2-1}.$$

**Sonli algoritm.** Berilgan haqiqiy $\kappa$ uchun $F=0$ tenglamaning kompleks ildizlari Myuller usuli [13] bilan topiladi. Mukammal kontaktli elastik holat ildizidan boshlab qovushqoqlik ulanadi va ildiz K bo'yicha $10^3$ dan kerakli qiymatgacha 120 ta logarifmik qadam bilan uzatiladi; iteratsiyalar nisbiy aniqlik $10^{-12}$ ga yetguncha davom ettiriladi. Ildizlar o'tkazib yuborilmaganligi argument prinsipi [14] bilan tekshiriladi:

$$N_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F'(\Omega)}{F(\Omega)}\,d\Omega,$$

bunda C — $0{,}3\le \mathrm{Re}\,\Omega\le \mathrm{Re}\,\Omega_b-0{,}08$, $-0{,}04\le \mathrm{Im}\,\Omega\le 0{,}03$ to'g'ri to'rtburchak, $\Omega_b$ — $z=0$ tarmoqlanish nuqtasi. $N_0$ funksiya argumentining kontur bo'ylab o'zgarishidan hisoblanadi. F kontur ichida qutblarga ega bo'lmagani uchun $N_0$ undagi ildizlar soniga teng.

Natijalar va muhokama

Hisoblarda $c_{s1}/c_s=0{,}5$, $\rho_1/\rho=0{,}8$ ($\bar{\mu}_1=0{,}2$) olindi. Bu shisha-plastik anker ($\mu_1\approx 5$ GPa, $\rho_1\approx 2100$ kg/m³) va granitga ($\mu_0\approx 25$ GPa, $\rho\approx 2650$ kg/m³) mos. Yadro parametrlari $A=0{,}048$, $\alpha=0{,}25$, $\beta=0{,}05$ (vaqt $R/c_s$ birligida) muhitning $\approx 0{,}06$ yo'qotish koeffitsiyentiga mos. $R=12{,}5$ mm da $\Omega=1$ ga 39 kHz, $K=1$ ga $k_t\approx 2\cdot 10^{12}$ Pa/m mos; $K=0{,}1\ldots 10$ oralig'i [5] dagi amaliy diapazonga mos.

**Verifikatsiya.** $A=0$, $K\to\infty$ da ildizlar haqiqiy bo'ldi va mukammal kontakt ildizlariga teng chiqdi ($\kappa=2{,}5$ da $\Omega=2{,}1768$, $\kappa=3$ da $\Omega=2{,}3469$). Argument prinsipi bo'yicha ildizlar soni barcha holatlarda Myuller usuli natijasiga mos keldi. Asimptotikaning aniqligi: $K=0{,}1$ da $\mathrm{Re}\,\Omega$ xatosi 0,01% dan, $-\mathrm{Im}\,\Omega$ xatosi 6% dan oshmaydi, $K=0{,}3$ da mos ravishda 0,12% va 9–16%.

**1-jadval. Birinchi buralish modasining kompleks chastotasi $\Omega$ (qovushqoq-elastik muhit)**

| $\mathcal{K}$ | $\kappa=2{,}5$ | $\kappa=3$ | $\kappa=4$ | $\kappa=5$ |
|---|---|---|---|---|
| $\infty$ | 2,1507 − 0,014282i | 2,3292 − 0,009142i | 2,7006 − 0,005258i | 3,1002 − 0,003492i |
| 10 | 2,1228 − 0,013188i | 2,3012 − 0,008695i | 2,6751 − 0,005088i | 3,0775 − 0,003400i |
| 3 | 2,0599 − 0,011004i | 2,2387 − 0,007620i | 2,6183 − 0,004593i | 3,0269 − 0,003103i |
| 1 | 1,9077 − 0,006792i | 2,0905 − 0,005002i | 2,4851 − 0,003120i | 2,9089 − 0,002128i |
| 0,3 | 1,6281 − 0,002006i | 1,8298 − 0,001512i | 2,2609 − 0,000938i | 2,7150 − 0,000630i |
| 0,1 | 1,4175 − 0,000368i | 1,6426 − 0,000273i | 2,1096 − 0,000164i | 2,5888 − 0,000108i |

**Chastotaga ta'sir.** Kontakt bikrligi kamayishi bilan chastota kamayadi: $K=1$ da $\kappa=2{,}5$ uchun 11,3%, $\kappa=5$ uchun 6,2%. Ta'sir kichik to'lqin sonlarida kuchliroq, bu [6] ga mos. $K\to 0$ da faza tezligi $\mathrm{Re}\,\Omega/\kappa$ sterjendagi siljish to'lqini tezligiga intiladi ($K=0{,}1$, $\kappa=5$ da 0,518).

**So'nishga ta'sir.** $-\mathrm{Im}\,\Omega$ ancha kuchli kamayadi: $K=1$ da 52% ga, $K=0{,}1$ da 32–39 marta. Fazoviy so'nish $-\mathrm{Im}\,\omega/c_g$ ($c_g$ — guruh tezligi) $\kappa=2{,}5$ moda uchun mukammal kontaktda 27,4 dB/m, $K=0{,}1$ da esa 0,6 dB/m, chastota esa 84 dan 55 kHz gacha kamayadi. So'nish chastotaga qaraganda ancha sezgir diagnostik belgidir.



© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

**2-jadval. Elastik holatda birinchi va ikkinchi buralish modalarining kesilish to'lqin sonlari**

| $\mathcal{K}$ | ∞ | 10 | 3 | 1 | 0,3 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-moda, $\kappa_{c1}$ | 1,9893 | 1,9465 | 1,8519 | 1,6257 | 1,1845 | 0,7659 |
| 2-moda, $\kappa_{c2}$ | 3,6783 | 3,6205 | 3,5090 | 3,3162 | 3,1120 | 3,0189 |

**Kesilish nuqtalariga ta'sir.** Kontakt kuchsizlanganda ikkala modaning kesilish to'lqin soni kamayadi (2-jadval): modalar kengroq oraliqda kanallanadi, ikkinchi moda kichikroq κ da paydo bo'ladi.

**Xulosa**

1. Irsiy qovushqoq-elastik muhit va prujinali kontaktni hisobga oluvchi buralish to'lqinlari dispersion tenglamasi yopiq ko'rinishda olindi; u mukammal kontakt va to'liq sirpanishni xususiy hol sifatida o'z ichiga oladi.
2. Kuchsiz kontakt uchun kompleks chastotaning yopiq asimptotikasi olindi: chastota kvadratining siljishi $k_t$ ga chiziqli, so'nish esa $K\to 0$ da $k_t^2$ ga proporsional. $K=0,1$ da u chastotani 0,01%, so'nishni 6% aniqlikda beradi.
3. Shisha-plastik anker–granit tizimida kontakt kuchsizlanganda birinchi moda chastotasi $K=1$ da 11,3% ga, fazoviy so'nish esa 27,4 dB/m dan ($K=\infty$) 0,6 dB/m gacha ($K=0,1$) kamayadi, kesilish to'lqin soni ham kamayadi.
4. So'nish kontakt holatiga chastotadan ancha sezgir: sodda formula o'lchangan chastotadan $k_t$ ni baholaydi, $k_t^2$ qonuniyati esa uni so'nish bo'yicha tekshirishga imkon beradi. Natijalar $c_{s1}<c_s$ hol uchun o'rinli; po'lat ankerlarda moda nurlanuvchi va alohida tahlil talab qiladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Rose J.L. Ultrasonic Guided Waves in Solid Media. – New York: Cambridge University Press, 2014.
2. Muggleton J.M., Kalkowski M., Gao Y., Rustighi E. A theoretical study of the fundamental torsional wave in buried pipes for pipeline condition assessment and monitoring // J. Sound Vib. – 2016. – Vol. 374. – P. 155–171.
3. Nguyen K.L., Treyssède F., Hazard C. Numerical modeling of three-dimensional open elastic waveguides combining semi-analytical finite element and perfectly matched layer methods // J. Sound Vib. – 2015. – Vol. 344. – P. 158–178.
4. Beard M.D., Lowe M.J.S., Cawley P. Ultrasonic guided waves for inspection of grouted tendons and bolts // J. Mater. Civ. Eng. – 2003. – Vol. 15, No. 3. – P. 212–218.
5. Tong Z.W., Han Q.B., Yin C., Qi L.H., Zhang Y., Zhu C.P. Guided waves in a solid rod embedded in infinite medium with weak interface // MATEC Web Conf. – 2016. – Vol. 44. – Art. 02012.
6. Wang J., Qu J. Effects of imperfect interface on the dispersion curves of torsional waves in a composite hollow cylinder // Structural Health Monitoring 2023. – Lancaster: DEStech Publications, 2023. – DOI: 10.12783/shm2023/36942.
7. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. 2nd ed. – Singapore: World Scientific, 2022.
8. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976.
9. Teshaev M.Kh., Safarov I.I., Kuldashov N.U., Ishmamatov M.R., Ruziev T.R. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // J. Vib. Eng. Technol. – 2020. – Vol. 8, No. 4. – P. 579–585.



© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.

10. Safarov I., Teshaev M., Toshmatov E., Boltaev Z., Homidov F. Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2020. – Vol. 883. – Art. 012190.
11. Safarov I.I., Teshaev M., Marasulov A.M., Nuriddinov B.Z. Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells // Eng. J. – 2021. – Vol. 25, No. 7. – P. 97–107.
12. Ruziyev T., Safarov I., Teshayev M. et al. Assessment of the dissipative properties of viscoelastic hollow cylindrical bodies with filler during the propagation of natural waves // J. Compos. Sci. – 2026. – Vol. 10, No. 8. – Art. 437.
13. Burden R.L., Faires J.D., Burden A.M. Numerical Analysis. 10th ed. – Boston: Cengage Learning, 2016.
14. Kravanja P., Van Barel M. Computing the Zeros of Analytic Functions. – Berlin: Springer, 2000. – (Lecture Notes in Mathematics; Vol. 1727).



© Ushbu material Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) litsenziyasi asosida tarqatiladi.